EL MOMENTO DEL TRABAJO DE LA TÉCNICA EN LA EVOLUCIÓN DE UN PROCESO DE ESTUDIO: EL CASO DE LA DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA[1]

Miguel R. Wilhelmi <miguelr.wilhelmi@unavarra.es>

Universidad Pública de Navarra, España

ABSTRACT

The *a priori* control of potential study processes is one of the distinctive characteristics of the Epistemological Program in Mathematics Education. The empirical data allow to contrast the formulated hypotheses and to value the effective realizations. For the Anthropological Didactical Theory, this contrast supposes the *a priori* determination of a local praxeology (taking into account the levels of institutional codetermination) and the analysis of a study process around this praxeology. We will exemplify this contrast through a process of study for the determination of a circumference given by a polynomial of degree 2 with two variables.

RÉSUMÉ

Le contrôle *a priori* de processus d'étude potentiels est une des caractéristiques distinctives du Programme Épistémologique en didactique des mathématiques. La preuve de la contingence permet le contraste des hypothèses formulées et l'évaluation des réalisations effectives. Pour la Théorie Anthropologique du Didactique, ce contraste suppose la détermination *a priori* d'une praxeologie locale (tenant compte des niveaux de codétermination institutionnelle) et l'analyse d'un processus d'étude autour de cette praxeologie. Nous exemplifierons ce contraste par rapport à un processus d'étude mené par la détermination d'une circonférence donnée par un polynôme de degré 2 avec deux variables.

1. INGENIERÍA DIDÁCTICA: HACIA UNA DIDÁCTICA NORMATIVA

La ingeniería didáctica (Artigue, 1990) como metodología de la investigación permite la evolución de una didáctica explicativa hacia una didáctica normativa o técnica. Para ello, es preciso controlar *a priori* la puesta en marcha de proyectos de enseñanza y, *a posteriori*, comparar el estudio teórico (elaborado *a priori*) con las realizaciones efectivas (*prueba de la contingencia*). Esta metodología de la investigación es una de las características definitorias de las diferentes perspectivas que participan de los principios fundamentales del *programa epistemológico* (Gascón, 1998).

> « Les didacticiens français ont recours à des analyses élaborées préalablement à l'expérimentation en classe. Ce passage de la pensée à l'action a été caractéristique de leur travail durant ces deux décennies. Conjointement au développement de l'ingénierie didactique […] a été accentué l'usage des études de cas et des analyses a posteriori dont la confrontation avec l'analyse a priori constitue un moyen de validation de l'hypothèse de recherche […] La didactique des mathématiques française possède une remarquable unité. Certes les travaux menés par différents didacticiens varient dans leurs centres

[1] I Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico. "Sociedad Escuela y Matemáticas: Las aportaciones de la TAD", Universidad Internacional de Andalucía. Sede Antonio Machado de Baeza (Jaén), 27 – 30 de octubre de 2005. (Versión 4 de julio de 2005).

> d'intérêt mais ils paraissent tous relever d'une épistémologie commune et partager la même méthodologie. » (Kilpatrick, 1994, pp.89–90).

Para poder realizar el contraste entre el análisis *a priori* y el análisis *a posteriori* es necesario determinar los "*observables* o unidades mínimas de análisis que permitirán identificar y describir las estados y funcionamiento de los sistemas didácticos" (Lacasta, Pascual, Wilhelmi y Madoz, en prensa).

La TAD modeliza la actividad matemática mediante la determinación de *praxeologías* (Chevallard, 1997), que representan una estructuración coherente de los modos de "hacer" y "saber". Lacasta et al. (en prensa) razonan que, para la TAD, los observables son índices o descriptores que muestran desadaptaciones entre una praxeología establecida *a priori* (la cual comprende las *razones de* ser, las *cuestiones generatrices*) y un proceso de estudio efectivamente desarrollado. En general, estas desadaptaciones, continuan dichos autores, no se identifican con técnicas, tecnologías o teorías como estructuras completas, sino con ciertos *gestos técnicos* y modos *reglados* de justificación-explicación. Asimismo, puesto que toda actividad matemática está condicionada por la naturaleza *ostensiva - no ostensiva* de los objetos matemáticos (Bosch et Chevallard, 1999), la eficacia y coherencia de las técnicas utilizadas, así como su justificación, depende de los registros de representación utilizados y, consecuentemente, de los sistemas estructurados de signos a través de los cuales los objetos matemáticos "se muestran" de manera ostensiva.

> "Par suite, par rapport à la TAD, les types d'observables sont : *tâches*, *gestes techniques* et techniques, *moyens réglés de validation*, *utilisations des ostensifs* et systèmes structurés de signes." (Lacasta et al., 2005).

Lo dicho no debe interpretarse como la posibilidad de establecer relaciones de tipo causal entre un observable "aislado" y un proceso de estudio matemático, puesto que los observables pueden ser explicados únicamente con relación a una praxeología al interior de una institución. Con otras palabras, la *praxeología local representa la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos* (Bosch y Gascón, 2004).

El planteamiento propuesto supone, como requerimiento mínimo, la determinación *a priori* de una praxeología local (tomando en cuenta los niveles de codeterminación institucional) y el análisis de un proceso de estudio en torno a dicha praxeología. El contraste *a posteriori* entre las realizaciones efectivas de los estudiantes y los presupuestos elaborados *a priori* permite: por un lado, la descripción del proceso de estudio; por otro lado, la valoración de las restricciones institucionales consideradas *a priori*; y, por último, la identificación de decisiones didácticas pertinentes para la acción en procesos de estudio potenciales.

En este trabajo ejemplificamos este proceso con relación al estudio de la determinación de circunfencias dadas mediante una relación polinómica en dos variables de grado 2 con coeficientes racionales. En la sección 2 analizamos brevemente la enseñanza en la institución de referencia de la determinación de las circunferencias. En la sección 3 se describe una *clase de praxeologías* asociadas a la determinación de circunferencias (que difieren exclusivamente en la técnica de resolución asociada). En la sección 4 se muestran y analizan algunas respuestas de un grupo de estudiantes a un cuestionario sobre dicha clase de praxeologías y, para terminar, en la sección 5 se realiza una breve síntesis y se establecen las conclusiones.

2. LA ENSEÑANZA ACTUAL DE LA DETERMINACIÓN DE CIRCUNFERENCIAS Y SUS RESTRICCIONES

En muchas instituciones de enseñanza, la introducción de la obra “Geometría Analítica” se identifica con la determinación del lugar geométrico de los puntos del plano que verifican una cierta relación algebraica. La actividad matemática se centra en la manipulación simbólica de *ostensivos* (Bosch y Chevallard, 1999) que conlleva la transformación de una ecuación por equivalencias algebraicas, hasta la obtención de un *representante canónico* de dicho lugar. Hay una ausencia de *cuestionamiento tecnológico* (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004), que se manifiesta en el uso de técnicas sin problematizar su dominio de validez, su eficacia, su coste, posibles modificaciones para adaptar dicha técnica a otras tareas, etc. Brevemente, las técnicas aparecen como instrumentos rígidos para la realización de tareas aisladas y estereotipadas.

De esta forma, pueden identificarse diferentes *fenómenos didácticos* (Wilhelmi, Godino y Font, 2005):

1. *Atomización de la técnica de las transformaciones algebraicas*.
2. *Ilusión de infalibilidad en el uso de la técnica de las transformaciones algebraicas*. El proceso de estudio determina una brecha entre el uso de la técnica y el análisis de los resultados obtenidos.
3. *Ilusión de manipulaciones simbólicas fiables.* En la institución se presume que los estudiantes realizan con maestría una gama amplia de manipulaciones simbólicas, de tal forma que los errores tienen una interpretación ingenua en términos dicontómicos “conocimiento – desconocimiento”.
4. *Ausencia de análisis exploratorios de resultados factibles.* De hecho, la dimensión experimental de la actividad matemática está relegada en la institución y, por lo tanto, los estudiantes no realizan un análisis previo de la ecuación implícita de la circunferencia con valores concretos.
5. *Función confirmatoria (no explicativa) del “logos”*. La responabilidad de los momentos tecnológico-teóricos recae en el profesor, que no tiene una función de director de estudios sino que muestra el saber como un producto cultural cerrado (*clase magistral*).
6. *Función mostrativa (no interactiva) de la representación gráfica*. Una vez terminada la manipulación simbólica, se representa la circunferencia en el plano cartesiano. Sin embargo, el plano cartesiano no representa un *medio material* (Brousseau, 1998) de interacción para hacer evolucionar el proceso de estudio.

Y, como consecuencia de estos fenómenos didácticos, no sólo se deduce la *irresponsabilidad matemática de los estudiantes*, sino que implícitamente se identifica el *modelo epistemológico* dominante en la institución de referencia que estructura el saber en conocimientos conceptuales, procedimientales y actitudinales. Modelo que identifica la problemática docente en un proceso de *selección* (qué enseñar), *secuencia* (en qué orden) y *disposición en el tiempo* (cuándo y con qué intensidad), sin atender ni a las *restricciones institucionales* ni a las *necesidades didácticas* (relativas al proceso de estudio) .

Apoyándonos en un trabajo anterior (Wilhelmi, 2003), mostramos cómo la técnica de resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita puede evolucionar para la determinación de una circunferencia conocida una representación algebraica no canónica, superando las restricciones matemático-didácticas que afectan al *proceso de algebrización* (Bolea, Bosch y Gascón, 2001) de las organización matemática de la obra matemática "cónicas". Asimismo, la evolución que propondremos determinará una respuesta a la pregunta: "¿Cómo integrar la geometría con regla y compás y la geometría analítica?" (Bosch y Gascón, en prensa).

Esta evolución o *tensión de la prueba* (Lakatos, 1976) conlleva la determinación de diferentes técnicas intermedias ("de las parábolas y del cuadrado") y culmina con la identificación y rutinización de la técnica "estándar" de determinación de circunferencias ("por equivalencias algebraicas"), que es aceptada en la institución como el instrumento (fiable) más económico en la resolución de la tarea de determinación de circunferencias. El momento del trabajo de la técnica juega entonces un papel *integrador* en el proceso de estudio (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), puesto que la evolución de las técnicas es posible únicamente en la medida en que son justificados los gestos técnicos y explicitadas las teorías que determinan la coherencia del discurso.

3. PRAXEOLOGÍA "DETERMINACIÓN DE UNA CIRCUNFERENCIA"

Chevallard (1997, pp.37–38) define *praxeología* de la siguiente forma:

> « En toute institution, l'activité des personnes occupant une position donnée se décline en différents *types de tâches* T, accomplis au moyen d'une certaine *manière de faire*, ou *technique*, τ. Le couple [T/τ] constitue, par définition, un *savoir-faire*. Mais un tel savoir-faire ne saurait vivre à l'état isolé : il appelle un *environnement technologique - théorique* [θ/Θ], ou savoir (au sens restreint), formé d'une *technologie*, θ, 'discours' rationnel (*logos*) censé justifier et rendre intelligible la technique (*tekhnê*), et à son tour justifié et éclairé par une *théorie*, Θ, généralement évanouissante. Le système de ces quatre composantes, noté [T/$\tau/\theta/\Theta$], constitue alors une *praxéologie*. »

Una praxeología no determina una estructura [T/$\tau/\theta/\Theta$] rígida y aislada de otras organizaciones praxeológicas. En ocasiones, una misma tarea puede ser realizada mediante diversas técnicas, que son justificadas y explicadas con base en tecnologías y teorías. Si las técnicas comparten ciertos gestos técnicos (y, por lo tanto, la justificación de los mismos) y, asimismo, es posible realizar una justificación teórica robusta de toda las estructuras [T, τ_i, θ_i] mediante una única teoría T, diremos que se establece una *clase técnica de praxeologías*. El adjetivo "técnica" hace referencia al hecho de que se identifica una pluralidad de "saberes-hacer" y que es esta pluralidad la que determina la necesidad de hablar de "clase de praxeologías" y no, simplemente, de "praxeología"[2]. En esta sección presentamos una *clase técnica de praxeologías* asociadas a la tarea "determinación de una circunferencia dada una expresión algebraica".

[2] Una clase de praxeologías puede establecerse por la indetificación de una pluralidad de "tareas", "saberes-hacer" o "saberes". De esta forma, es posible determinar clases de praxeologías de tipos: *práctico* (diferentes tareas se resuelven con un mismo conjunto de gestos técnicos, que son justificados mediante un cuerpo tecnológico-teórico común), *técnico*, *tecnológico* (una clase de tareas es realizada por una misma técnica que admite interpretaciones diversas y explicaciones no equivalentes) y *teórico* (una clase de tareas es realizada por una misma técnica, justificada por una tecnología que es fundamentada en diferentes marcos matemáticos; sobre los cuales se establecen conexiones pragmáticas, esto es, asociadas a las tareas y *cuestiones generatrices*).

3. 1. Tarea

Determinación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen una ecuación polinómica en dos variables (x e y), de grado 2 y con coeficientes racionales, de la forma ($a, b, c, d, e, f \in \mathbf{Q}$):

$$R \equiv a\,x^2 + b\,x + c\,xy + d\,y^2 + e\,y + f = 0;\ a = d = 1,\ c = 0 \text{ y } b^2 + e^2 - 4f > 0$$

De manera más sencilla ($a, b, c \in \mathbf{Q}$):

$$R \equiv x^2 + a\,x + y^2 + b\,y + c = 0;\ a^2 + b^2 - 4c > 0$$

3. 2. Técnicas

En el anexo se muestra gráficamente la determinación de diversas circunferencias mediante las técnicas que a continuación se describen formalmente.

Técnica experimental

Representación en el plano cartesiano de una colección "suficiente" de puntos (x, y) que verifican la relación R y determinación a partir de ésta del centro y del radio.

Técnica de las parábolas

El método para la determinación del centro y del radio de una circunferencia, dada por su ecuación implícita ($R \equiv x^2 + a\,x + y^2 + b\,y + c = 0;\ a^2 + b^2 - 4c > 0$), se puede desarrollar siguiendo los pasos:

1. *Cálculo de las coordenadas del centro*. La intersección de los ejes de las parábolas asociadas a la relación ($x^2 + a\,x + c = 0$ y $y^2 + b\,y + c = 0$) determinan el centro.

   Ejes: $x = \frac{-b}{2}$ e $y = \frac{-c}{2}$; entonces, coordenadas centro: $\left(\frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$

2. *Determinación de un punto que cumpla la relación* R. Se sustituye la ordenada (abscisa) del centro en la relación R, obteniéndose para la abscisa (ordenada) dos valores que pertenecen a la circunferencia. Esto es, se soluciona la ecuación cuadrática en x ($y = \frac{-c}{2}$):

$$x^2 + bx + \left(\frac{-c}{2}\right)^2 + c\left(\frac{-c}{2}\right) + d = 0$$

   O bien, la ecuación cuadrática en x ($x = \frac{-b}{2}$): $\left(\frac{-b}{2}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2}\right) + y^2 + cy + d = 0$

3. *Cálculo del radio.* Si denotamos por (x_0, y_0) a cualquiera de los puntos calculados en el apartado anterior, el radio se determina como la distancia de este punto al centro:

$$r = \sqrt{\left(x_0 + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y_0 + \frac{c}{2}\right)^2}$$

Técnica del cuadrado

La ecuación implícita de una circunferencia se interpreta como una ecuación de segundo grado en x o en y. El discriminante de la solución de dichas ecuaciones determina los intervalos de existencia de los parámetros x e y, respectivamente. Esto es:

Ecuación implícita	Ecuaciones asociadas
$x^2 + a\,x + y^2 + b\,y + c = 0$ $(a^2 + b^2 - 4c > 0)$	$\begin{cases} y \text{ parámetro}: x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(y^2 + cy + d)}}{2} \\ x \text{ parámetro}: y = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4(x^2 + bx + d)}}{2} \end{cases}$

Entonces ha de cumplirse (para la existencia de solución):

$$b^2 - 4(y^2 + cy + d) \geq 0; \quad c^2 - 4(x^2 + bx + d) \geq 0$$

En tal caso:

$$x \in \left[\frac{-b - \sqrt{b^2 + c^2 - 4d}}{2}; \frac{-b + \sqrt{b^2 + c^2 - 4d}}{2}\right]; \quad y \in \left[\frac{-c - \sqrt{b^2 + c^2 - 4d}}{2}; \frac{-c + \sqrt{b^2 + c^2 - 4d}}{2}\right]$$

La intersección de las regiones que se forman es un cuadrado circunscrito en la circunferencia buscada. El lado de dicho cuadrado mide $\sqrt{b^2 + c^2 - 4d}$ (u.l.). El centro de dicho cuadrado coincide con el centro C de la circunferencia y el semilado con el radio r de la misma. Así:

$$C \equiv \left(\frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right); \quad r \equiv \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

Técnica híbrida

Brevemente, la técnica híbrida supone el cálculo del centro de la circunferencia por el método de las parábolas (punto de corte de los ejes de las parábolas) y el cálculo del radio por el método del cuadrado (mitad de la longitud del intervalo de existencia de la variable x o de la variable y).

Técnica de las transformaciones algebraicas

La técnica consiste en "formar cuadrados" en las variables x e y. Dada la ecuación implícita de una circunferencia ($x^2 + a\,x + y^2 + b\,y + c = 0$; $a^2 + b^2 - 4c > 0$), se procede como sigue:

$$\begin{aligned} x^2 + ax + y^2 + by + c = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

3. 3. Tecnología

Por simplicidad en el discurso, las técnicas se han mostrado de manera formal, para cualquier valor de los parámetros racionales a, b y c que cumplan la condición $a^2 + b^2 - 4c > 0$. Bien comprendido, este desarrollo es una tecnología, puesto que justifica y "vuelve" inteligibles las técnicas que pueden ser aplicadas a circunferencias concretas.

3. 4. Teoría

Wilhelmi (2003, pp. 495–500) muestra cómo es posible determinar las condiciones que deben cumplir los parámetros[3] a partir de manipulaciones algebraicas de la ecuación implícita de una

[3] A saber: $a = d$, $c = 0$ y $b^2 + e^2 - 4f > 0$.

circunferencia y el conocimiento de las características de "redondez" (equidistancia al centro) y "finitud" (longitud finita) que cumple toda circunferencia.

Las características de "redondez" y "finitud" no son excluyentes en geometría euclidea (no proyectiva), sin embargo es conveniente retener ambas puesto que en ciertas justificaciones es suficiente referirse a la finitud para excluir ciertos valores de los parámetros. En estas circunstancias, se determinan condiciones necesarias tanto para circunferencias, como para elipses y cónicas degeneradas en un punto; esto es, para todas las cónicas finitas. Así, la determinación de las condiciones que deben cumplir los parámetros para representar una circunferencia se enmarca en el estudio de las condiciones generales para la identificación de cónicas *no degeneradas* (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) y *degeneradas* (dos rectas o un punto).

3. 5. Comentarios

Un proceso de estudio centrado en la clase técnica de praxeologías descritas implicaría aceptar que los estudiantes tienen el conocimiento: "la circunferencia es un *redondo*", es decir, el conocimiento que permite, dado un conjunto de "contornos", identificar qué es una circunferencia y qué no lo es. Esta idea de redondez se formaliza estableciendo, para cada circunferencia, la existencia de un centro y de un radio.

El objetivo del proceso de estudio sería asociar el conocimiento de "redondez" con la representación algebraica de una circunferencia dada por una relación del tipo R. La evolución de este proceso de estudio conllevaría el uso de los parámetros de las relaciones de tipo R como *variables didácticas*. En este contexto, una variable didáctica es un parámetro que el profesor puede controlar para provocar la evolución de las técnicas de resolución o para determinar una justificación de dichas técnicas. Las restricciones de los parámetros "$a = d = 1$" y "$c = 0$" representan entonces decisiones didácticas consideredas sobre el uso de las variables didácticas. Estas restricciones podrían ser cuestionadas únicamente al final del proceso de estudio; en concreto, en el momento de la institucionalización del saber se establecen las condiciones necesarias y suficientes que determinan si una relación polinómica en dos variables (x e y), de grado 2 y con coeficientes racionales representa o no representa una circunferencia, quedando justificadas entonces las restricciones dadas. El proceso de estudio terminaría con la rutinización de las técnicas y con la evaluación de su eficacia y economía.

Los comentarios realizados determinan una confluencia entre la perspectiva situacionista de *evolución del conocimiento por confrontación a un medio antagonista en una situación adidáctica* y la propuesta antropológica de *la función integradora del trabajo de la técnica en el proceso de modelización del saber matemático a través de praxeologías*. De hecho, el momento del trabajo de la técnica, entendido como momento integrador de las estructuras "praxis" y "logos" tiene una dimensión adidáctica esencial.

Bloch (1999) considera que es posible considerar que una situación posee una *dimensión adidáctica* cuanto contiene un medio que permite al estudiante la acción responsable (desde el punto de vista matemático, no de la culpabilidad) en la construcción de saberes. El saber es aceptado entonces como instrumento que permite adaptaciones a la situación adidáctica. Si la situación adidáctica se presenta en forma de juego, las adaptaciones se manifiestan en el cambio (o mejora) de las estrategias diseñadas por el “jugador”. En general, si la situación no se presenta en forma de juego, las adaptaciones se manifiestan por decisiones matemático-didácticas que determinan la evolución del proceso de estudio.

4. ANÁLISIS DE UN CUESTIONARIO

4. 1. Relación con el saber en la institución de referencia

Los estudiantes[4] que realizan el cuestionario han estudiado previamente la técnica de las transformaciones algebraicas. Brevemente, dada una ecuación polinómica en dos variables de grado 2, los estudiantes determinan la circunferencia en dos pasos: uno, análisis de los coeficientes para identificar si la ecuación es o no es una circunferencia; otro, si la ecuación representa una circunferencia, manipulación de la ecuación hasta establecer su representación canónica (“formando cuadrados”) para encontrar las coordenadas del centro y valor del radio. Se supone que esta técnica se ha *rutinizado* y que, por lo tanto, los estudiantes la utilizan de manera eficaz. Asimismo, esta técnica es admitida en la institución como un instrumento económico para la determinación de circunferencias. El proceso de estudio descrito y la formación matemática que tienen los estudiantes permiten enunciar las siguientes hipótesis matamático-didácticas:

1. Los estudiantes tienen maestría en la representación gráfica de parábolas (funciones y relaciones), en la resolución de ecuaciones de segundo grado, en el cálculo de la distancia (euclidea) entre dos puntos en el plano cartesiano y en manipulaciones algebraicas elementales.
2. El método de las transformaciones algebraicas permitirá explicar “acciones irresponsables” de los estudiantes con relación al envite epistemológico al que son enfrentados en el cuestionario. De hecho, el discurso fuertemente formalizado y técnico en la introducción de las nociones básicas de la geometría analítica determina *restricciones didácticas*, esto es, relativas a la ecología de los saberes en procesos de estudio efectivos y potenciales, que devuelven de manera sistemática la responsabilidad matemática al profesor.
3. La observación debe mostrar pautas directrices para los momentos de formulación e institucionalización del saber, que restituyan el carácter experimental de las matemáticas y que tengan en cuenta que la “clase aprende” cuando la evolución del proceso de estudio se realiza en *interacción social* (entre los estudiantes y el profesor como director del proceso de estudio).

4. 2. Descripción esquemática del cuestionario

I. *Consigna*: Se describe el proceso de estudio realizado en clase y se determina cuál será el envite epistemológico que tendrá que abordar el estudiante.

II. *Método de las parábolas*:

[4] Los estudiantes (17–18 años) pertenecen a la Especialidad de Matemáticas y Física para Educación Secundaria de la Facultad de Ciencias de la Eduación de la Universidad de Piura (Perú).

a. Determinación de la circunferencia $C_1 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$ mediante el cálculo de los puntos de corte con los ejes coordenados[5].
b. Determinación de la circunferencia $C_2 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 4y + 2 = 0$. La técnica utilizada en la determinación de C_1 no se puede utilizar, puesto que C_2 tiene únicamente dos puntos de corte con los ejes coordenados. Se introduce la noción de "parábolas asociadas a una circunferencia", que permiten el cálculo del centro de la circunferencia, y se calcula el radio como la distancia del centro a un punto de corte.
c. Determinación de la circunferencia $C_3 \equiv x^2 - 4x + y^2 + 4y + 5 = 0$.
d. Análisis del método: relación con el método de las transformaciones algebraicas, aplicación sistemática de la técnica y análisis de ecuaciones polinómicas en dos variables que no definen una circunferencia:
    i. $D_1 \equiv x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5 = 0$.
    ii. $D_2 \equiv x^2 + y^2 - x + 2xy - y - 2 = 0$.

III. *Método del cuadrado*:
a. Determinación de la circunferencia $C_1 \equiv \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x} + \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{y} - 2 = 0$.
b. Aplicación del método del cuadrado a 3 o 4 circunferencias dadas por su ecuación implícita ($x^2 + a\,x + y^2 + b\,y + c = 0$).
c. Comparación de los tres métodos (transformaciones, de las parábolas y del cuadrado) con relación a su eficacia, economía, experimentación, etc.
d. Análisis de la necesidad de control sobre las restricciones de los valores de los parámetros mediante el análisis de la ecuación $x^2+2x-2xy+y^2-2y+1=0$.

4. 3. Prueba de la contingencia

Las respuestas de los estudiantes representan la base empírica para el contraste de las hipótesis formuladas *a priori*. Este contraste se fundamenta en los observables identificados. Nos centraremos en describir algunas respuestas representativas de *gestos técnicos* "de la clase". Estos gestos ponen en conexión dos o más técnicas y, por lo tanto, son indicadores del momento del trabajo de la técnica.

Contratos pedagógico y didáctico

El objetivo de la didáctica es la descripción, explicación y toma de decisiones sobre procesos de construcción y comunicación de saberes matemáticos en lo que esta construcción y comunicación tienen de específico de dichos saberes. En un proceso de enseñanza y aprendizaje, el contrato didáctico queda constituido por un conjunto de reglas, generalmente implícitas, que determinan la responsabilidad matemática de los estudiantes y del profesor con relación a ciertos modos de "hacer" y de "saber".

La TAD acepta como *hipótesis básica* (Bosch, Fonseca y Gascón, 2004, p. 207) y, por lo tanto, provisionalmente no cuestionable por decisión metodológica, que los procesos de estudio son "transparentes" en términos del contrato didáctico y de las restricciones institucionales relativas a la praxeología asociada al saber *a enseñar*. Asimismo se acepta que,

[5] En el anexo se muestra esquemáticamente la determinación de las circunferencias C_1, C_2 y C_3 mediante las técnicas propuestas.

en ciertas ocasiones, los estados y funcionamiento del sistema didáctico admitan explicaciones más generales formuladas en términos de la relación bipolar profesor-estudiante. El contrato pedagógico determina explicaciones de los estados efectivos y potenciales observables en esta relación bipolar.

En el proceso de estudio observado, ciertas respuestas admiten una interpretación pedagógica general. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra una respuesta de un estudiante en el análisis de una cónica degenerada (dos rectas). El estudiante determina el "centro" (como si se tratase de una circunferencia) y, a la vez, afirma que no se trata de un circunferencia "puesto que tiene término en *xy*". Esta "contradicción" se explica por la clausula del contrato pedagógico general que determina que "una de las funciones del trabajo en clase de los estudiantes es mostrar al profesor que tienen una maestría tanto de los *saberes-hacer* como de los *saberes*". En este sentido, la respuesta dada por el estudiante en la figura 1 es protototípica[6].

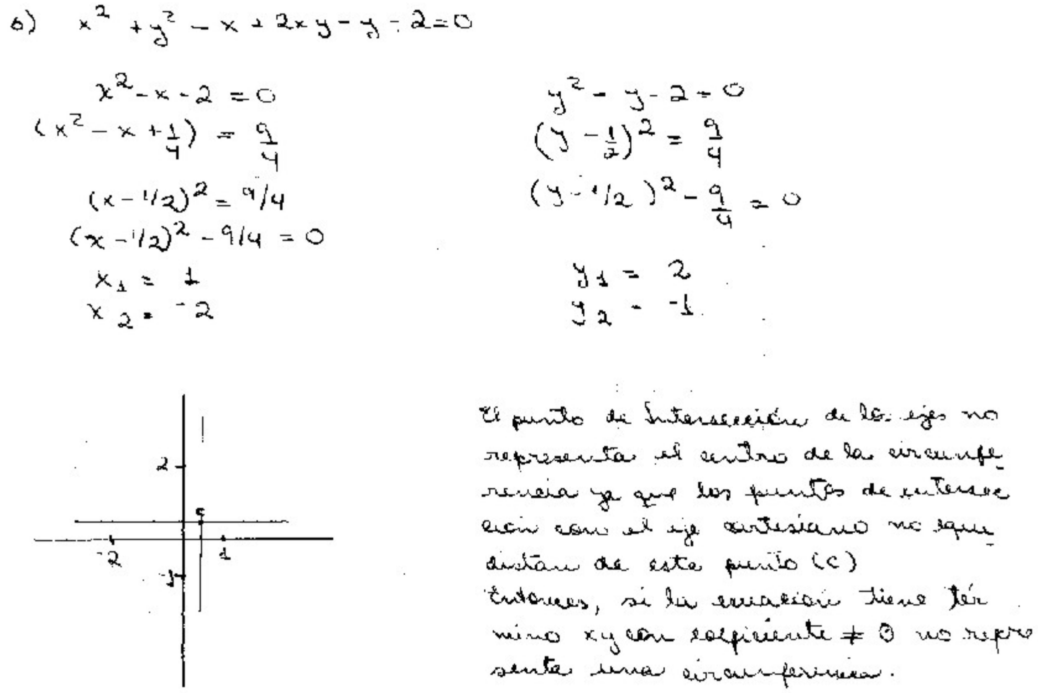


Figura 1. Contrato pedagógico: muestra del *saber-hacer* y del *saber* de un estudiante.

Ruptura radical

En muchas ocasiones, en el proceso de estudio se indentifican momentos de "ruptura epistemológica", en los cuales el estudiante realiza la tarea propuesta o propone su resolución mediante la técnica de las transformaciones algebraicas, abandonando el envite epistemológico al que el proceso de estudio le aboca (figura 2). Estas rupturas se identifican con pasos de una tarea para la cual se dispone (en la clase) de una técnica rutinizada (algorítmica o no) o de una explicación naturalizada (verbal o formalmente formulada) fundamentada en la técnica de las transformaciones a otra tarea que determina un envite epistemológico, esto es, es necesario determinar un *saber a enseñar* para realizar esta última tarea.

[6] Todas la respuestas textuales que se muestran son representativas de un modo de "hacer" o de "saber" de la clase. Ninguna de ellas representa una respuesta patológica o aislada.

¿Qué problemas encuentra? ¿Cómo podría resolverlos?

Si $y = 0$ x no tendrá soluciones, ¿qué quiere decir?, significa que la circunferencia no corta al eje de las ordenadas, eje de las "y".

Se podría resolver, completando cuadrados.

Figura 2. Ruptura epistemológica.

Técnica híbrida

No todos los estudiantes evitan el envite epistemológico que el proceso de estudio conlleva. Algunos estudiantes determinan una técnica híbrida entre la técnica de las parábolas y la técnica de las transformaciones algebraicas. Básicamente esta técnica consiste en la determinación del centro de la circunferencia por el método de las parábolas (punto de corte de los ejes de las parábolas) y el cálculo del radio utilizando el saber "toda circunferencia admite una representación canónica $(x–a)^2 + (y–b)^2 = r^2$, donde (a, b) representa el centro y r el radio" (figura 3).

3) Para calcular el radio tenemos dos casos:

a) si al menos una parábola intercepta al ~~(os ejes)~~ el eje coordenado, perpendicular a su eje, tenemos que los dos puntos pertenecen a la circunferencia; luego aplicando formula de distancia calculamos el radio -el centro ya es conocido-

b) si no se conoce más que el centro, conviene reemplazar el centro (h, k) en la forma canónica, desarrollar y establecer una igualdad entre términos correspondientes de la ecuación dada; pudiendo encontrar el radio.

p. ej.: $x^2 - 4x + y^2 + 4y + 5$ ∴ $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 3$

i) por método de las parábolas $h = 2$ $+ k = -2$ $c(2, -2)$

$(x-2)^2 + (y+2)^2 = r^2$

ii) desarrollando y comparando : $5 = 8 - r^2$

$r = \sqrt{3}$

Figura 3. Articulación de las técnicas "de las parábolas" y "de las transformaciones".

Análisis de los métodos en términos económicos

La técnica híbrida mostrada es el resultado de la articulación de dos técnicas y determina pautas para el control de la evolución de procesos de estudio potenciales. La articulación de técnicas es problemática. El proceso de estudio tiende a privilegiar una de ellas, que es aceptada como la más fiable y económica (figura 4).

iv) Si se tiene: $x^2 - 6x + y^2 - 2y + 8 = 0$

Ecuación de 2do grado en x:

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4(y^2 - 2y + 8)}}{2} \Rightarrow \Delta = 1 + 8y - y^2 \geq 0$.

(Aquí observamos que no es fácil descomponer al discriminante en 2 factores para hallar el campo de variación de "y".

Usar este método sería optar por un camino largo y fastidioso.

Figura 4. Análisis de los métodos en términos económicos.

Asimismo es necesario tener en cuenta que, en el proceso de estudio observado, la técnica de las transformaciones algebraicas está claramente privilegiada, porque ha sido introducida en una clase magistral por el profesor y se ha realizado un trabajo específico para su rutinización.

Ausencia de análisis de los resultados obtenidos

La forma en que la técnica de las transformaciones algebraicas ha sido privilegiada (a saber, por introducción aislada y no problematizada) determina acciones irresponsables (desde el punto matemático, no de la culpabilidad) de los estudiantes. Así, por ejemplo, en el apartado III-b del cuestionario ("Aplicación del método del cuadrado a 3 o 4 circunferencias dadas por su ecuación implícita") los estudiantes proceden como sigue: determinan la ecuación implícita a partir de la ecuación canónica y aplican el método del cuadrado sobre la ecuación así obtenida. El resultado es "forzosamente" la ecuación canónica originalmente planteada, puesto que "el paso de una ecuación a otra", razonan implícitamente los estudiantes, "se ha realizado por equivalencias algebraicas sucesivas". La técnica del cuadrado no es utilizada entonces como "técnica alternativa", sino como "instrumento confirmatorio" (figura 5).

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 10 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(y^2 - 10y + 10)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y^2 + 40y - 40}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{y^2 + 10y - 9}}{2}$$

$x = 1 \pm \sqrt{y^2 + 10y - 9}$

Hay solución si $y^2 + 10y - 9 \geq 0$ → y pertenece al intervalo $(-10{,}8 \,;\, 0{,}8)$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 \; 4(1)(x^2 - 2x + 10)}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4x^2 + 8x - 40}}{2} = \frac{\cancel{10} \pm \cancel{2}\sqrt{-x^2 \; 12x + 15}}{\cancel{2}}$$

$y = 5 \pm \sqrt{-x^2 + 2x + 15}$

Hay solución si $-x^2 + 2x + 15 \geq 0$ → x pertenece al intervalo $(-3 ; 5)$

El lugar geométrico debe estar dentro del cuadrado de vértices $(5; -10{,}8)\,(5; 0{,}8)$
$(-3; -10{,}8)\,(-3; 0{,}8)$
La circunferencia tiene su centro en $(1;5)$ y su radio es 4, su ecuación es:
$(x-1)^2 + (y-5)^2 - 16 = 0$

Figura 5. Ausencia de análisis de los resultados obtenidos por el método del cuadrado.

4.4. Resultados

Descripción del proceso de estudio

El proceso de estudio observado aporta un apoyo empírico a la tesis que sostiene que la *topogénesis* y la *cronogénesis* del saber (Chevallard, 1985) son determinantes para explicar el funcionamiento institucional de los saberes. La técnica de las transformaciones algebraicas, que ha sido enseñada con antelación al proceso de estudio observado de forma rígida y aislada, permite explicar en gran medida la irresponsabilidad matemática de los estudiantes, que se identifica con pérdidas de control de la actividad matemática que estos realizan o con la ruptura del envite epistemológico al que el proceso de estudio les aboca.

Valoración de las restricciones institucionales consideradas a priori

La maestría que tienen los estudiantes en las técnicas de resolución de ecuaciones de segundo grado, de representación gráfica de parábolas y de cálculo de la distancia entre dos puntos, no viene acompañada de instrumentos de control de los resultados obtenidos. El aislamiento tecnológico tiene como consecuencia el uso ineficaz de las técnicas: los estudiantes utilizan dichas técnicas de manera eficaz en unos momentos y de manera ineficaz en otros. El uso eficaz de las técnicas presenta un patrón errático en las respuestas de los estudiantes que no puede ser explicado en términos de rutinización, sino de "control".

Decisiones didácticas pertinentes para la acción en procesos de estudio potenciales

La técnica de las transformaciones algebraicas debe surgir como síntesis de un proceso de estudio que articule las obras "Geometría plana con regla y compás" y "Geometría analítica" mediante el álgebra elemental y que comporte aspectos expermimentales (donde las representaciones en el plano cartesiano jueguen un papel central). Dicha técnica debe institucionalizarse como un instrumento eficaz y económico para la determinación de una circunferencia dada su ecuación implícita.

5. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

Una de las características definitorias del programa epistemológico de investigación en didáctica de las matemáticas es que parte del progreso en la teoría se fundamenta en el contraste entre un análisis *a priori* y un análisis *a posteriori*. Las realizaciones efectivas determinan criterios de factibilidad de mecanismos de funciomaniento del sistema didáctico, así como indicadores para la valoración de procesos de estudio potenciales. La teoría determina los observables que permitirán objetivar y despersonalizar el proceso de estudio y describirlo en términos praxeológicos, atendiendo a las restricciones de la institución de referencia.

En el presente trabajo hemos mostrado, con relación a un proceso de estudio para la determinación de una circunferencia dada su ecuación implícita, cómo la TAD puede integrar de manera consistente la metodología de la *ingeniería didáctica*. Esta integración supone un cambio metodológico en los análisis que se vienen haciendo dentro del la TAD: el paso de análisis *retrospectivos* del funcionamiento de los sistemas didácticos en las instituciones de enseñanza a análisis *prospectivos* de procesos de estudio efectivos, que han sido confeccionados *ex profeso* por la propia teoría (teniendo en cuenta los diferentes niveles de codeterminación institucional).

Este cambio metodológico determina una respuesta a la hipótesis según la cual la TAD necesita integrar en su análisis descriptivo-explicativo de los sistemas didácticos el *nivel molecular de la actividad matemática*[7], para así poder actuar de manera más eficaz en procesos de estudio que potencialmente puedan tener lugar en la institución.

[7] "Postulamos que la posible conmensurabilidad entre ambos Programas de Investigación dependerá, por una parte, de la capacidad de las 'teorías proceptualistas' de integrar sus modelos 'cognitivos', cada vez más próximos a 'modelos epistemológicos locales', en un modelo global de la actividad matemática […] y, por otra, de la capacidad del Programa Epistemológico […] de tomar en consideración el nivel 'molecular' de la actividad matemática dentro de sus modelos epistemológicos." (Gascón, 1998, p.165).

Reconocimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco de los proyectos: PIE 10/2005 UPV-EHU y Resolución 238/2005, 28 febrero, Relaciones Internacionales-UPNA.

REFERENCIAS

Artigue M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281–307.

Bosch M., Gascón J. (en prensa). El tractament integrat de la formació del professorat de matemàtiques. *SCM/Notícies*. Barcelona: Societat Catalana de Matemàtiques.

Bolea P., Bosch M., Gascón J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21(3): 247–204.

Bosch M., Fonseca C., Gascón, J. (2004).Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 24(2/3): 205–250.

Bosch M., Gascón J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. de Castro y M. Gómez, *Análisis del currículo actual de matemáticas y posibles alternativas* (XX SIIDM-SEIEM). (26–28 Marzo, Madrid). En prensa.

Bosch M., Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(1): 77–124

Brousseau G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266 .

Chevallard Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17–54.

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori, ICE - U. de Barcelona.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Gascón J. (1999). *Didactique fondamentale* versus *Advanced Mathematical Thinkings*: ¿dos programas de investigación inconmensurables? *Actes Xè Université d'été de Didactique des Mathématiques, Tomo II*. Houlage: ARDM. pp.152–170.

Gascón J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7–33.

Godino J. D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237–284.

Kilpatrick J. (1994), Vingt ans de didactique française depuis les USA. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Lacasta E., Pascual J. R., Wilhelmi M.R. y Madoz E. G. (en prensa). Analyse *a priori* par rapport à une théorie : détermination des observables pour l'analyse des données empiriques. Le cas de la fonction continue en mathématiques. *Colloque International «Didactiques : quelles references epistemologiques? »*. Bordeaux: AFIRSE et IUFM d'Aquitaine.

Lakatos I. (1976). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza, 1986.

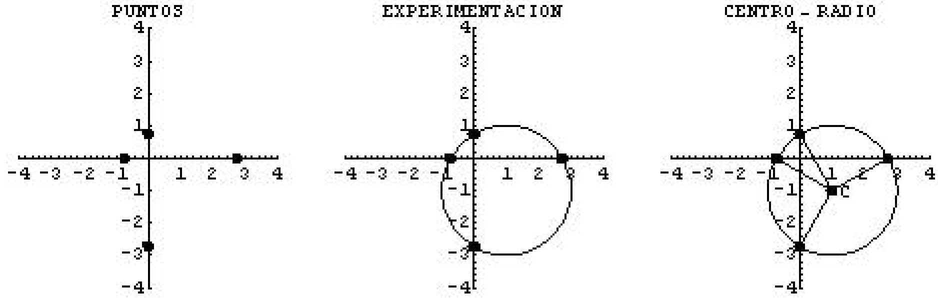
Lacasta E., Pascual J. R., Wilhelmi M.R. y Madoz E. G. (en prensa). Bases empiriques de modèles théoriques en didactique des mathématiques : réflexions sur la théorie de situations didactiques et l'approche ontologique et sémiotique. *Colloque International « Didactiques : quelles references epistemologiques? »*. Bordeaux: AFIRSE et IUFM d'Aquitaine.

Wilhelmi M. R. (2003): *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, nº 23. Pamplona, ESP: Universidad Pública de Navarra.

ANEXO

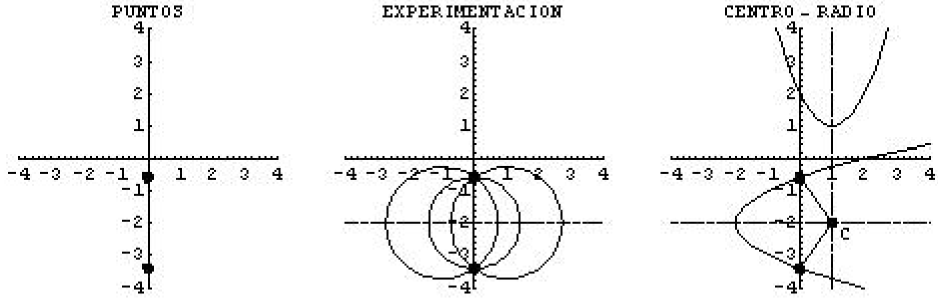
Representación gráfica de la determinación de diversas circunferencias representadas mediante una ecuación polinómica en dos variables de grado 2 y coeficientes enteros mediante las técnicas “experimental”, “de las parábolas” y “del cuadrado”

Fórmula: $C_1 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$



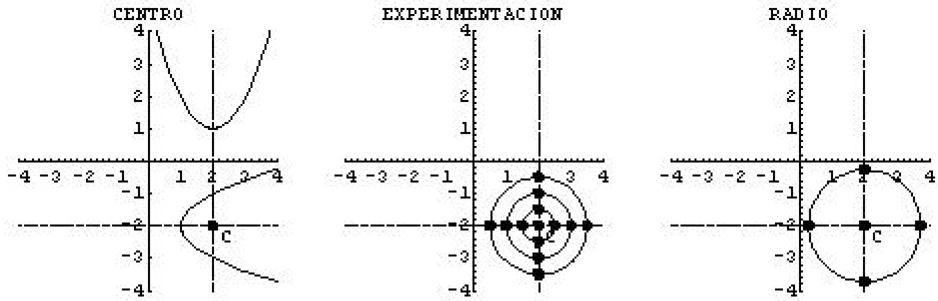
Técnica: Experimental

Fórmula: $C_2 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 4y + 2 = 0$



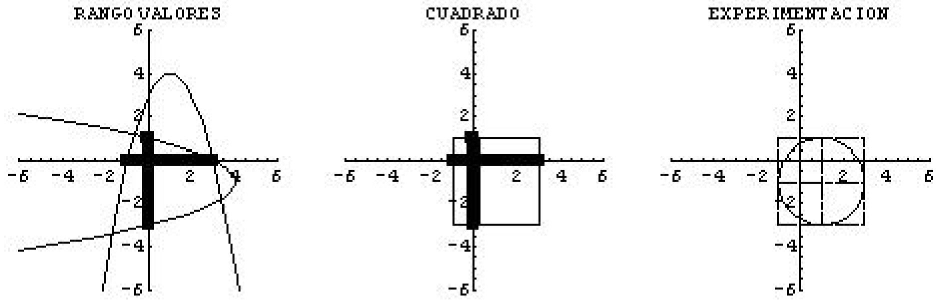
Técnica: Experimental, para la determinación del radio; de las parábolas, para el cálculo del centro.

Fórmula: $C_3 \equiv x^2 - 4x + y^2 + 4y + 5 = 0$



Técnica: De las parábolas.

Fórmula: $C_1 \equiv x^2 - 2x + y^2 + 2y - 2 = 0$



Técnica: Del cuadrado.