

# ALGEBRIZACIÓN EN LA PROPORCIONALIDAD DE MAGNITUDES

Horacio Solar Bezmalinovic  
Universidad Autónoma de Barcelona UAB

Alicia Zamorano Vargas  
Pontificia Universidad Católica de  
Valparaíso PUCV

## ABSTRACT

From the point of view of the Anthropological Theory of Didactics (ATD), in relation to the mathematical organization of the proportionality of magnitudes in secondary school, we postulated: *is the rule of three an effective technique to teach the procedures and concepts of proportionality of magnitudes?* We made an exploratory study in Santiago de Chile (2002) with a qualitative and quantitative analysis with three units of analysis: the study of 3 books; questionnaires to two complete courses of approximately 30 students of 1<sup>st</sup> and 2<sup>nd</sup> Medium School (15-17) and interviews to 2 experts in mathematics. The results show the following: (1) the insertion of the rule of three as a main technique; (2) the explicit absence of the constant of proportionality as a technique; (3) the first degree of algebrisation of the mathematical educational process; (4) and the absence of technologies and theories of proportionality of magnitudes in secondary education. These results suggest that mathematical organizations about proportionality are very “specific” and rigid in Chilean education institutions.

## RÉSUMÉ

Dans la perspective de la TAD, à propos de l'organisation mathématique de la proportionnalité des grandeurs à l'école secondaire, nous posons la question suivante: *la règle de trois est-elle une technique effective pour enseigner les processus et les conceptions de proportionnalité des grandeurs?* Pour y répondre nous avons réalisé une étude exploratoire à Santiago du Chili (2002) avec une analyse qualitative et quantitative qui comprend trois unités: l'étude de 3 livres; passation de questionnaires dans deux cours complets de 30 élèves à peu près de 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> moyen – équivalent à 2<sup>e</sup> et 1<sup>e</sup> - et un entretien à 2 experts en mathématiques (docteurs). Les résultats montrent: (1) l'insertion de la règle de trois comme technique principale d'enseignement; (2) l'absence explicite de la constante de proportionnalité comme technique; (3) un processus d'enseignement et d'apprentissage situé au premier degré d'algébrisation; (4) et l'absence de technologies et de théories de proportionnalité des grandeurs au secondaire. Ces résultats suggèrent que les organisations mathématiques autour de la proportionnalité sont ponctuelles dans les institutions scolaires du Chili.

La presente comunicación es un resumen de una investigación realizada en el año académico 2002 en la P. Universidad Católica de Chile en el marco de un curso de seminario de investigación, curso final para el otorgamiento del título de profesor de Matemáticas y Licenciado de Educación de dicha universidad. La investigación se fundamenta desde la TAD expuesto originariamente por Chevallard, y un marco de trabajos de Gascón, Bosch y Bolea en relación a la organización matemática de la proporcionalidad de magnitudes en la escuela secundaria.

Nuestro objetivo en la investigación fue comparar resultados de sus investigaciones en un contexto alternativo, como es el caso de la educación secundaria en Santiago de Chile, con la pregunta: ¿La regla de tres es una técnica eficaz para enseñar los procedimientos y conceptos de proporcionalidad de magnitudes?

## Acercamiento a la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

El nacimiento del Programa Epistemológico<sup>1</sup> surge de la carencia mostrada por los modelos epistemológicos de las matemáticas vigentes, en particular como respuesta a los enfoques de corte cognitivo predominante en el campo de la educación matemática.

Se considera la *actividad matemática* como objeto primario de estudio (Chevallard 1999; Bolea, Bosch, Gascón 2001; Gascón 2002). Por tanto, la forma particular de integrar “lo pedagógico” y “lo matemático” –que constituye el rasgo común a todas las teorías didácticas

---

<sup>1</sup> En Brousseau (1998) se encuentra una recopilación de sus trabajos publicados entre 1970 y 1990, en donde se puede encontrar las ideas generativas del nacimiento de la TAD. (sugerencia en Gascón 2002)

después de la ruptura con la Pedagogía– se lleva a cabo en el Programa Epistemológico mediante el *cuestionamiento* y la *ampliación de lo* que se consideraba “matemático” en el modelo popular de las matemáticas.

La primera de las ampliaciones de “lo matemático” estuvo protagonizada por la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) que incluyó como parte integrante de los conocimientos matemáticos las condiciones de su utilización en situación escolar. Pero a medida que se iba desarrollando el Programa se puso de manifiesto que no era posible interpretar adecuadamente la *actividad matemática escolar* sin tener en cuenta los fenómenos relacionados con la *reconstrucción escolar de las matemáticas* que tienen su origen en la propia institución productora del saber matemático. Aparecieron así los fenómenos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985) y, como una consecuencia natural, la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD). En ésta se toma como objeto primario de investigación la *actividad matemática*. (Gascón 2002)

Siguiendo a Gascón (2002), el Programa Epistemológico aborda el problema de la Educación Matemática desde el análisis de las *prácticas matemáticas* que se llevan a cabo en las diferentes instituciones -no sólo docentes-. Por tanto, para tratar dicho problema, la Didáctica de las Matemáticas debe construir y contrastar empíricamente: (a) un modelo *epistemológico general* de las matemáticas y *modelos locales* de sus diferentes ámbitos; (b) modelos de la *génesis y el desarrollo de las organizaciones matemáticas* en cada una de las instituciones. Tenemos, en resumen, que la integración conjunta de lo pedagógico y lo matemático se produce en el Programa Epistemológico cuestionando y ampliando radicalmente lo “matemático”.

Esta hipótesis provoca una *matematización<sup>2</sup> del problema de la Educación Matemática* y lo despersonaliza situándolo a un nivel institucional, relativamente independiente de la *voluntad*, la *formación*, y la *motivación* y las restantes *características individuales* de los sujetos de las instituciones.

Desde el Programa Epistemológico, surge la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1992,1999; Bolea, Bosch, Gascón 2001; Schneider 2001). Dentro de las nociones que se enmarcan, se acentúa la idea de que el objeto de la Didáctica de las Matemáticas es el estudio de la *actividad matemática*, sus *distintos componentes*, así como sus condiciones de *producción y reproducción*. (Font 2002, Pág. 152) puesto que se realiza un cuestionamiento de todo lo relacionado con la matemática a enseñar, en otras palabras, se trata de problematizar el mismo saber matemático, en *organizaciones matemáticas* (OM), de que manera actúa la *transposición didáctica* y como las *organizaciones didácticas* pueden hacerse coherente al contexto (Chevallard 1999)

La TAD postula que toda *actividad matemática institucional* -es decir aquella que se lleva a cabo en una institución de enseñanza- (Chevallard 1999; Bosch, Fonseca, Gascón 2004; Gascón 2002) puede modelizarse mediante la noción de “praxeología (u organización) matemática”<sup>3</sup>, o como se conoce hasta el momento que todo concepto matemático puede incorporarse dentro de un modelo que es utilizado para su enseñanza.

### **Organización matemática**

Para comprender la lógica de la teoría antropológica y las consideraciones que tiene con cada uno de los saberes matemáticos, expondremos los constructos fundamentales de lo que es una praxeología u organización matemática. Para entender este concepto es más claro

---

<sup>2</sup> Puesto que el análisis científico de las prácticas matemáticas requiere *elaborar* modelos epistemológicos nuevos de los diferentes ámbitos de las matemáticas (así como un modelo epistemológico general). Esto no puede hacerse sin llevar a cabo *reorganizaciones* de los saberes matemáticos para que puedan ser reconstruidos en las diferentes instituciones y difundidos entre ellas. Dichas reorganizaciones deben ser consideradas como una actividad matemática genuina.

<sup>3</sup> Gascón utiliza los términos “organización” y “praxeología” como sinónimos.

ejemplificarlo: Probabilidad, Geometría euclídea, Funciones, Proporcionalidad, son organizaciones matemáticas que se desarrollan en el ámbito escolar las cuales se modelizan por medio de *organizaciones didácticas*. La estructura de una organización matemática, se compone de *tareas, técnicas, tecnología, y teoría* con las respectivas relaciones que existen entre ellas. (Chevallard 1999; Bosch, Espinoza, Gascón 2003; Bolea, Bosch, Gascón 2001; Bosch, Fonseca, Gascón 2004)

**Tareas:** Se trata de una noción muy general que incluye cualquier tipo de tareas que sean consideradas “matemáticas” en una institución de referencia. Por ejemplo son tipos de tareas matemáticas en la institución docente universitaria el resolver una ecuación diferencial, buscar una base de un espacio vectorial, calcular el valor de una función. En el caso de una institución escolar son ejemplos de tareas la resolución de una ecuación de primer grado, encontrar una magnitud proporcional a otra.

**Técnicas:** La realización de cualquier tipo de tareas, hace necesario utilizar una *técnica*, es decir, una manera de hacer sistemática y compartida cada una de las tareas la cual depende de la institución en la que nos situemos. Por ejemplo, una técnica para la realización de la tarea de encontrar una magnitud proporcional a otra sería utilizar *la regla de tres*, otra técnica para la misma tarea es encontrar la *constante de proporcionalidad*.

La unión de las nociones anteriores se denominará bloque *práctico-técnico*, el que está formado por un tipo de tareas y una técnica, en que la institución, ya sea universitaria o escolar, considera pertinente para llevar a cabo cada una de estas nociones. Es importante hacer notar que generalmente, cada técnica concreta sólo permite realizar algunas tareas para las cuales es pertinente y que a su vez fracasa en la realización de las restantes tareas del mismo tipo.

**Tecnología:** El bloque *práctico-técnico*, no puede concebir aisladamente en una institución, por lo menos requiere de la existencia de un “discurso racional” que *justifique* la técnica y que *muestre su pertinencia* para llevar a cabo el tipo de tareas para las cuales se supone que está destinada. Otras de sus funciones es explicar y aclarar la técnica haciendo legible el funcionamiento de la técnica, *relacionarla* con otras técnicas y, lo que es más importante, *producir nuevas técnicas*. Cumpliendo un rol integrador Así, por ejemplo, el teorema de Bolzano puede hacer el papel de elemento tecnológico de una de las técnicas que se utilizan inicialmente para aproximar las soluciones de una ecuación. En la proporcionalidad de magnitudes, la regla de tres puede ser justificada por la teoría axiomática de las propiedades de las proporciones, en que *el producto de medios es igual al de los extremos*.

**Teoría:** La teoría juega, respecto a la tecnología, el mismo papel que ésta jugaba respecto a la técnica. Los axiomas, y más específicamente la teoría axiomática, fundamentan a la tecnología, por ejemplo, el teorema de Bolzano, considerado como un elemento tecnológico, puede ser justificado a su vez, en una teoría axiomática de los números reales que contenga el axioma del supremo.

A su vez, diremos que junto al bloque *práctico-técnico* existe dentro de las organizaciones matemáticas institucionalizadas, un segundo bloque, el *tecnológico-teórico*.

El sistema formado por los cuatro componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías) constituye una *praxeología* (u *organización*) matemática que consideramos como la *unidad mínima* en que puede describirse la actividad matemática.

Algunas consideraciones con respecto a las organizaciones matemáticas son que en primer lugar son *relativas a la institución de referencia*, es decir que lo que es considerado como una tarea -o técnica, o tecnología, o teoría- matemática en una institución no tiene por qué serlo en otra institución que se dedica a lo mismo: enseñar matemática. De hecho, en una institución

particular únicamente pueden considerarse como “tipos de tareas”, aquéllas para las que se dispone de algún tipo de técnica, con su entorno tecnológico-teórico más o menos explícito.

### METODOLOGIA

Pensamos que la naturaleza de la pregunta: ¿La regla de tres es una técnica eficaz para enseñar los procedimientos y conceptos de proporcionalidad de magnitudes? es transversal a los significados atribuidos por el sujeto o por la institución a la proporcionalidad de magnitudes en relación a la regla de tres. Y por lo tanto tratamos que el estudio abarque tanto al sujeto como a la institución. Por tales propósitos adoptamos realizar un estudio exploratorio entre una metodología cualitativa y cuantitativa con tres unidades de análisis: (1) análisis de 3 libros de texto representativos que se utilizan en el currículo de matemáticas en Chile. (2) Aplicación de cuestionarios cerrado y abierto a estudiantes de un Liceo, para estudiar el pensamiento proporcional. (3) Entrevistas a 2 expertos en matemáticas (PhD) sobre la utilización de la *regla de tres* como técnica eficaz para la enseñanza de procedimientos y conceptos de proporcionalidad. La primera unidad abarca el significado institucional; la segunda los significados personales y la tercera unidad las concepciones de expertos en la materia.

**(1) Análisis de textos:** hemos escogido tres textos de Matemática para el 1er año de enseñanza media – 3º de ESO en el sistema español- nivel en el cual el currículo oficial incluye el contenido de proporcionalidad de magnitudes. El objetivo es identificar cómo se presenta el concepto, qué técnicas se utilizan en los procedimientos presentes y la existencia de una o varias técnicas.

**(2a) Cuestionario cerrado:** análisis cuantitativo de un cuestionario cerrado realizado a 80 alumnas de un Liceo<sup>4</sup> de 2º y 3º año medio – equivalente 4 de ESO y 1º de bachillerato respectivamente- ubicado en la zona central de Santiago, es un liceo tradicional y reconocido, y podríamos decir que es significativamente representativo de la realidad escolar santiaguina e incluso del país. El objetivo del cuestionario es identificar si los alumnos reconocen casos en que existen distintos tipos de proporcionalidad y, especialmente, casos donde dos magnitudes no son proporcionales, uno de los objetivos es ratificar que en la introducción del concepto de proporcionalidad en las aulas de nuestro país, no se dan ejemplos en que las magnitudes no sean proporcionales, es decir, los alumnos no podrían diferenciar entre aquéllas que sí los son con aquéllas que no.

Las preguntas y respuestas correctas son descritos en el recuadro y siguiendo las alternativas:

Preguntas	Alternativas
1. La cantidad de pedazos de pastel que toca a cada uno, si se hacen partes iguales, y el número de personas que resultan a repartir.	a) Proporcionalidad directa
2. El tiempo que tarda un alumno en hacer un examen y la nota que saca.	b) Proporcionalidad indirecta
3. El número de partidos que ha ganado un equipo de baloncesto y el número de partidos que ha perdido (recordar que, en baloncesto, no hay empates).	c) Proporcionalidad compuesta
4. La velocidad que llevan unos coches y el tiempo que demoran en recorrer la misma distancia por la misma carretera.	d) Ninguna de las anteriores

<sup>4</sup> El Liceo 7 es un establecimiento educacional de secundaria y bachillerato que recibe un alumnado de primaria proveniente de un amplio contexto socioeconómico

5. La recaudación total por entradas de una sesión de teatro y el número de personas que han asistido (todas las entradas son al mismo precio).

**(2b) Cuestionario abierto:** el siguiente es un análisis cualitativo de 8 cuestionarios abiertos realizados a alumnas del mismo liceo, 5 de 2<sup>do</sup> y 3 de 3<sup>ero</sup> medio respectivamente, quienes se eligieron a priori por evidenciar aptitudes idóneas y por su afectividad positiva hacia las matemáticas. El objetivo es reconocer cuáles son las técnicas más utilizadas para la resolución de problemas de proporcionalidad; para ello, se establecieron categorías de cada una de las respuestas.

**(3) Entrevistas:** respecto a las entrevistas, hemos generado unidades de análisis, utilizando el criterio temático, ya que dentro de cada entrevista escogimos, si existían críticas o no a la regla de tres, que es el objeto de nuestro estudio.

Para el análisis de los datos, es necesario describir los tipos de organizaciones matemáticas que postula la TAD y contrastar el estudio con los niveles de algebrización que postula.

### **Complejidad de las organizaciones matemáticas**

Para poder comprender la razón de ser del uso de las organizaciones matemáticas describiremos su creciente complejidad descrita principalmente por Chevallard (1999) y Gascón (2002).

Se dirá que una *organización (o praxeología) matemática*, es **puntual** en una institución si está generada por lo que en la institución es considerado como un único tipo de tareas, o una única técnica. De manera que la noción de organización puntual es relativa a cada institución y está definida a partir del bloque práctico-técnico, es decir a partir de las tareas y técnicas que cada institución estime pertinente para sus alumnos.

Del mismo modo, se dice que una *organización (o praxeología) matemática* es **local** en una institución, si se obtiene como resultado de la integración de diversas praxeologías puntuales. Cada praxeología local está caracterizada por una *tecnología*, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías puntuales que la integran. En general las organizaciones puntuales se integran en praxeologías locales para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de cuestiones problemáticas que no se podían resolver completamente en ninguna de las organizaciones puntuales de partida. A lo largo del proceso de estudio, que es a la vez un proceso de (re)construcción de una organización puntual en la institución de referencia, se va desarrollando un discurso tecnológico común que permite *describir, interpretar, justificar, explicar y relacionar* entre sí a las antiguas técnicas matemáticas, así como producir técnicas “nuevas”. De hecho, en el paso de un conjunto de organizaciones puntuales a una única organización local, se pone en funcionamiento y toma protagonismo el discurso tecnológico que caracteriza la organización local en cuestión.

Se dirá que una *organización matemática (o praxeología)* es **regional** en una institución si se obtiene mediante la coordinación, articulación y posterior integración, alrededor de una *teoría matemática* común, de diversas praxeologías locales en cada institución. La reconstrucción institucional de una teoría matemática requiere elaborar un *lenguaje común* que permita *describir, interpretar, relacionar, justificar y producir* las diferentes tecnologías de las organizaciones matemáticas locales que integran las organizaciones regionales.

## Organizaciones matemáticas algebrizadas

Como hemos tratado de reflejar, todo componente matemático, como por ejemplo, la geometría, la estadística, la teoría de funciones, etc. tiene una organización matemática que las puede llegar a modelizar. Ahora bien, el álgebra se sitúa en cada una de los tipos de modelizaciones, en menor o mayor grado, pero de alguna forma se puede llegar a modelizar. Diremos que existen organizaciones matemáticas algebrizadas, dependiendo de como modeliza los componentes matemáticos.

Utilizando el marco descrito en Bolea, Bosch, Gascón (2001) caracterizaremos una organización algebraica. Para entender su estructura, la describiremos en términos de modelo: diremos que una modelización matemática es una modelización algebraica, si modeliza -o sea si puede llegar a representar los rasgos característicos de la organización matemática- íntegramente todos los componentes del sistema y, en particular, si modeliza materialmente las técnicas matemáticas de dicha organización (Bosch, Bolea, Gascón, 2001, pág. 7)

Siguiendo a Bolea, Bosch, Gascón (2001) se describen 4 *indicadores del grado de algebrización* de una organización matemática, los que no serán más que una consecuencia de la naturaleza (más o menos) algebraica de la modelización en cuestión. (1) Manipulación de la estructura global de los problemas. (2) Tematización de las técnicas y nueva problemática al nivel tecnológico. (3) Unificación y reducción de los tipos de problemas, técnicas y tecnologías. (4) Emergencia de tipos de problemas independientes del sistema modelizado.

### Una posible algebrización de la organización clásica

La algebrización progresiva de la organización clásica, que presentaremos a continuación, como un proceso segmentado en tres niveles, conducirá, como veremos, a la inclusión de la proporcionalidad dentro de la organización matemática más amplia construida alrededor de la modelización funcional y, más en particular, de las funciones multilineales. Veremos que la transposición didáctica traerá al sistema de enseñanza elementos de las organizaciones algebrizadas de los distintos niveles, haciendo que coexistan, sin llegar nunca a articularse, ingredientes de organizaciones matemáticas que se encuentran en estados de desarrollo muy distintos. En el siguiente cuadro hemos resumimos de Bolea, Bosch y Gascón (2001) una posible organización matemática de la proporcionalidad de magnitudes.

	<b>1<sup>er</sup> grado de algebrización</b>	<b>2<sup>do</sup> grado de algebrización</b>	<b>3<sup>er</sup> grado de algebrización</b>
	Ecuación	Función lineal	Función (en general)
<b>Proporcionalidad directa.</b>	$y = kx$	$f(x_1)kx_1$	$f(x_1)kx_1$
<b>Proporcionalidad inversa</b>	$y = kx^{-1}$	$f(x)kx^{-1}$	$f(x)kx^{-1}$
<b>Proporcionalidad compuesta</b>	$y = kx_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon = \pm 1$ donde: $\varepsilon_i = 1$ Prop. directa $\varepsilon_i = -1$ Prop. Inversa	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = kx_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ con $\varepsilon_i = \pm 1$ donde: $\varepsilon_i = 1$ prop. directa. $\varepsilon_i = -1$ prop. Inversa	$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = kx_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ , con $\varepsilon_i = \pm 1$ donde: $\varepsilon_i = 1$ prop. directa. $\varepsilon_i = -1$ prop. Inversa
<b>Relación entre variables</b>	La relación es entre magnitudes	Variables actúan como números reales. Se comparan variables lineales.	Proporciones del tipo: $T = k\sqrt{l}$ Relación entre $T$ y $\sqrt{l}$

Una vez presentados los tres niveles de algebrización sucesiva de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes, mostraremos brevemente que, en efecto, se trata de organizaciones cada vez más algebrizadas.

En Bolea, Bosch y Gascón (2001) se propone que la totalidad de los componentes de la organización matemática clásica en torno a la proporcionalidad de magnitudes -en este primer nivel- la modelización no alcanza los elementos tecnológico-teóricos. Sólo a partir del segundo nivel de algebrización -ausente tanto en la enseñanza escolar como en la universitaria- se modelizan también los componentes tecnológico-teóricos. En el tercer nivel de algebrización -que si aparece en la enseñanza universitaria- se tiene asimismo una modelización completa, pero a un nivel “superior” en el que ya no se precisa de la teoría de las magnitudes porque se dispone de una teoría de los números reales y de las funciones reales de variable real. Como consecuencia de lo anterior, es posible mostrar que, a medida que avanzamos en los niveles de algebrización, los diferentes indicadores se cumplen de manera creciente y progresiva.

La siguiente matriz muestra la presencia de los indicadores en cada uno de los grados de algebrización en función de las tareas, técnicas y tecnologías sujetas.

Grados de algebrización del modelo propuesto	Indicadores del grado de algebrización			
	<i>Manipulación (IGA1)</i>	<i>Tematización (IGA2)</i>	<i>Unificación y reducción (IGA3)</i>	<i>Independencia del modelo (IGA4)</i>
<i>Primer grado</i>	Manipulación de magnitudes	Manipulación simple Dominio de validez: proporcionalidad	Reduce precariamente la complejidad conceptual de proporcionalidad	Emergen problemas independientes, como encontrar la constante de proporcionalidad
<i>Segundo grado</i>	Manipulación de variables	Manipulación compleja Dominio de validez: funciones lineales	Unificación y reducción de la proporcionalidad del tipo lineal	Emergen nuevos tipos de problemas, por ejemplo, manipulación de funciones
<i>Tercer grado</i>	Manipulación de variables en problemas no lineales	Manipulación compleja Dominio de validez: funciones	Unifica y reduce íntegramente la complejidad conceptual de la proporcionalidad	Emergen nuevos tipos de problemas, por ejemplo, manipulación de funciones con variables no lineales

### ANÁLISIS DE DATOS

(1) **Análisis de textos:** hemos generado sub-unidades de análisis, utilizando un criterio temático, escogiendo el tema de proporcionalidad, luego categorías de análisis en relación a la naturaleza y trato de la proporción presente en los libros; contrastándolos también con un criterio espacial. Del análisis hemos confeccionado la siguiente matriz que ordena y presenta el estudio de los libros de texto en cuestión. Con ello tratamos de identificar el grado de algebrización de la proporcionalidad y qué tipo de organización matemática representan los libros de texto que se utilizan en la enseñanza de la proporcionalidad en Chile.

Indicador	Texto		
	Editorial Santillana	Editorial McGraw-Hill	Editorial Zig-Zag
Se desarrolla Proporcionalidad como:	Unidad	Unidad	Subunidad
Nombre de la (sub)unidad	Proporcionalidad y porcentaje	Proporcionalidad numérica	¿Cuántos somos? Población, razones y proporcionalidad
Explícita el concepto de razón	Sí	Está implícito	Sí
Explícita el producto como cruzado en una proporción (regla de tres)	Sí	Sí	Está implícito
Trata el contenido de proporcionalidad directa. Cuántas páginas le dedica	Sí 2 páginas	Sí 5 páginas	Sí 2 páginas
Trata el contenido de proporcionalidad inversa Cuántas páginas le dedica	Sí 2 páginas	Sí 2 páginas	Sí 2 páginas
Explícita la proporcionalidad directa como cociente $\frac{y}{x} = k$	Se sugiere	No., se utiliza regla de tres para su cálculo	No, se utiliza regla de tres para su cálculo. Existe regularidad de la técnica en los contenidos.
Explícita la proporcionalidad inversa como producto $yx = k$	Está implícito	No, se utiliza regla de tres para su cálculo	No., se utiliza regla de tres para su cálculo. Existe regularidad de la técnica en los contenidos.
Se representan la proporcionalidad directa e inversa por medio de gráficos (lineal, hipérbola)	Representación gráfica Lineal e Hipérbola	Representación gráfica Lineal, se deja como actividad sin explicitar representación de la inversa como una hipérbola	Lineal.
Los componentes de una proporción, se nombran como medios y extremos	Sí	Sí	No
Explícita las propiedades de las proporciones	Sí	No	No
Trata el contenido de proporcionalidad compuesta y ¿cuántas páginas le dedica?	Sí, le dedica 2 páginas	Sí, le dedica 5 páginas	No lo trata
¿Cómo explícita el concepto y procedimiento de proporcionalidad compuesta?	Utiliza regla de tres	Utiliza adjunciones de proporcionalidad directa e inversa	No lo trata
Trata el contenido de porcentaje y ¿en dónde se sitúa con respecto a proporcionalidad?	Sí, lo trata y se encuentra después de proporcionalidad	Sí, lo trata como otra unidad, después de proporcionalidad	Sí, lo trata y se encuentra después de proporcionalidad
Explícita ejemplos en los que existan cantidades (magnitudes) que no sean proporcionales	Sí, están situados en una actividad, luego del contenido de proporcionalidad directa	Sí, están situados en una actividad, luego del contenido de proporcionalidad directa	No se explicitan
¿Cuál es el grado académico de sus autores?	Título de profesor	Título de Profesor	Grado de doctor

De la matriz se infiere que ninguno de los textos analizados alcanza el primer grado de algebrización plenamente, pues no establecen de manera explícita el coeficiente de proporcionalidad entre las variables (magnitudes) existentes en la proporcionalidad compuesta. Si bien en la mayoría de los textos utiliza la relación  $y = xk$  para la proporcionalidad directa, y en algunos la relación  $yx=k$  para el caso de proporcionalidad inversa, sin embargo, en ninguno de los libros analizados se generaliza la relación  $y = kx_1^{\epsilon}$



$x_2^\varepsilon \dots x_n^\varepsilon$ , en que  $x_1, \dots, x_n$  son magnitudes y  $\varepsilon = \pm 1$ , para la proporcionalidad compuesta. (Gascón y Fonseca 2002; Bosch, Fonseca, Gascón J 2004)

En el caso particular de los libros analizados, el de Santillana es el que más se asemeja al primer grado de algebrización propuesto anteriormente, ya que propone que se resuelvan los problemas buscando el *coeficiente de proporcionalidad* en la proporcionalidad directa e inversa, pero en el caso de la compuesta realiza un giro en su técnica de resolución puesto que utiliza implícitamente la regla de tres.

En el libro de la editorial McGraw-Hill, los problemas de proporcionalidad compuesta no se resuelven directamente, si no que se construyen por etapas sucesivas como adjunciones de relaciones de proporcionalidad simple, es decir varias proporciones directas u indirectas dependiendo el caso.

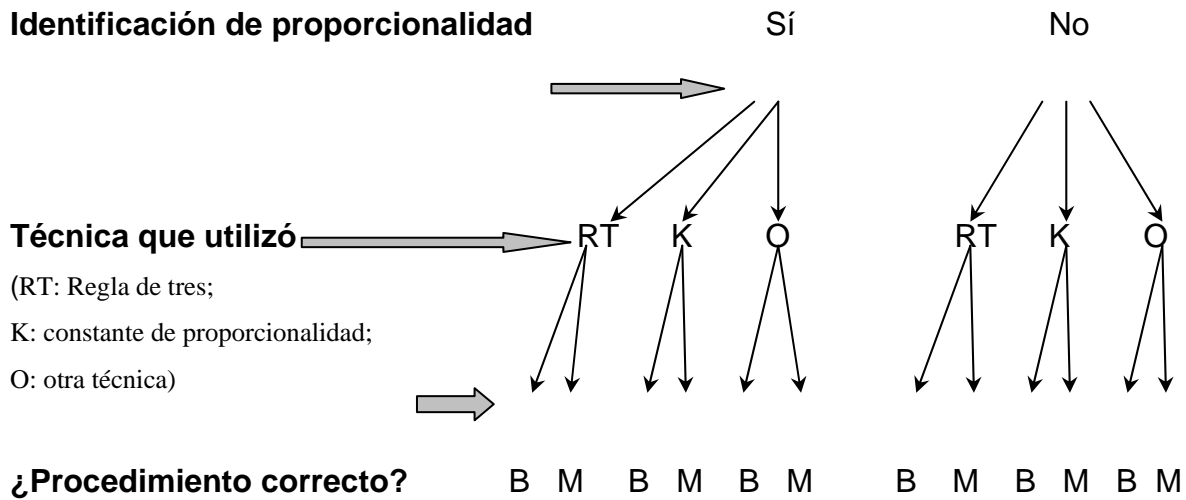
**(2a) Cuestionario cerrado:** la matriz inferior muestra un análisis cuantitativo de las respuestas de las estudiantes.

	% Pregunta 1		%Pregunta 2		%Pregunta 3		%Pregunta 4		%Pregunta 5	
	C	I	C	I	C	I	C	I	C	I
3° Medio	56,75%	37,83% alternativa b	37,83%	24,32% alternativa c	13,51%	81,08% alternativa b	56,75%	27,02% alternativa c	83,78%	5,40% alternativas b, c y d
2° Medio	67,44%	23,25% alternativa b	37,20%	46,51% alternativa b	20,93%	39,53% alternativa c	32,55%	34,88% alternativa a	74,41%	16,27% alternativa b
Total	62,50%	30,00% alternativa b	37,50%	35,00% alternativa b	17,50%	48,75% alternativa b	43,75%	23,75% alternativa b	78,75%	11,25% alternativa b
C: Porcentaje de respuestas correctas						I: Porcentaje de la respuesta incorrecta más significativa				

De la matriz superior se puede obtener los siguientes resultados:

- ✓ La proporcionalidad directa es significativamente identificada y reconocida por las alumnas.
- ✓ Las alumnas no reconocen que algunas magnitudes no son proporcionales; una posible explicación es que realizan la siguiente estrategia como proceso de identificación: se observa si existe proporcionalidad directa, si no existe, entonces es indirecta (inversa) o compuesta y, como no se han dado cuenta que tampoco es ninguna de estas dos, responden al azar por alguna de éstas.
- ✓ El 3° Medio reconoce la proporcionalidad indirecta (inversa). La mayoría en 2° Medio contesta al azar, ya que las respuestas están casi equitativamente distribuidas.
- ✓ Las alumnas no identifican la proporcionalidad compuesta, es posible que no lo recuerden, pero pensando en la nueva propuesta curricular, inferimos que este tipo de proporcionalidad no fue enseñado.
- ✓ Ninguna de las alumnas cuestionadas, contestó todas las preguntas correctamente; sólo hubo 2 alumnas que contestaron 4 preguntas correctas, siendo incorrectas aquellas en las que no había proporcionalidad de magnitudes.

**(2b) Cuestionario abierto:** El siguiente árbol muestra esquemáticamente todas las posibles tipos de respuestas.



(B: Bueno; M: Malo; en el caso de no haber reconocido el tipo de proporcionalidad, se consideró bueno, cuando el procedimiento que se siguió era correcto.)<sup>5</sup>

En la tabla inferior hemos clasificado las respuestas en categorías, asignándoles un puntaje numérico. El objetivo del método es facilitar la identificación del grado de algebrización en el que están situadas las alumnas encuestadas. Se utiliza este resultado para inferir sobre el total de alumnas del curso en el Liceo. A continuación, se muestra la tabla de clasificación de puntajes.

			<b>Indicadores</b>	
<b>Técnicas</b>	<b>Símbolos categorías</b>	<b>Números Categorías</b>	<b>Identificación de proporcionalidad</b>	<b>¿Procedimiento correcto?</b>
<b>Constante de Proporcionalidad</b>	SI-K-B	12	Identifica	Correcto
	SI-K-M	11	Identifica	Incorrecto
	NO-K-B	10	No identifica	Correcto
	NO-K-M	9	No identifica	Incorrecto
<b>Regla de tres</b>	SI-RT-B	8	Identifica	Correcto
	SI-RT-M	6	Identifica	Incorrecto
	NO-RT-B	4	No identifica	Correcto
	NO-RT-M	2	No identifica	Incorrecto
<b>Otras técnicas</b>	SI-O-B	7	Identifica	Correcto
	SI-O-M	5	Identifica	Incorrecto
	NO-O-B	3	No identifica	Correcto
	NO-O-M	1	No identifica	Incorrecto

Cada respuesta de cada cuestionario fue calificada con el puntaje dado anteriormente, según la identificación del tipo de proporcionalidad, la técnica que utilizaron para la resolución del

<sup>5</sup> Bueno o malo se interpreta como correcto o incorrecto.

problema y si su resultado fue el correcto, de acuerdo al tipo de proporcionalidad que identificaron; además, se obtuvieron las medianas y modas de estos resultados, con el objetivo de encontrar el puntaje de cada cuestionario, es decir, el obtenido por cada alumna.

Los resultados han sido resumidos en la siguiente tabla:

		Preguntas de proporcionalidad					Indicadores	
		Proporcionalidad Inversa		Proporcionalidad Compuesta				
Alumnas		a)	b)	c)	d)	e)	Mediana	Moda
2° Medio	A	8	8	<u>3</u>	8	8	8	8
	B	8	8	8	8	8	8	8
	C	8	8	<u>4</u>	8	8	8	8
	D	8	8	8	8	8	8	8
	E	8	8	<u>4</u>	8	8	8	8
3° Medio	F	8	8	8	<u>6</u>	<u>7</u>	8	8
	G	8	8	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>5</u>	7	7 y 8
	H	8	8	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>7</u>	7	7 y 8
<b>Mediana</b>		8	8	7	7	8	8	8
<b>Moda</b>		8	8	8	8	8	8	8

\* Los números subrayados son para facilitar el análisis.

Las siguientes son las conclusiones que se pueden observar a partir del análisis cualitativo obtenido de los cuestionarios<sup>6</sup>:

- A excepción de dos alumnas- puntaje 3 y 4 - y solamente en el ejercicio c), las encuestadas supieron identificar de manera correcta el tipo de proporcionalidad que estaba implícito en ellos.
- El primer grado de algebraización no se alcanza plenamente, puesto que ninguna utilizó la noción de constante de proporcionalidad- no hay puntajes del 8 al 12- debido a esto, dividimos el primer grado en tres subgrados:
  - ❖ **Grado 1A:** Se utiliza la regla de tres como una mera técnica sin reflexionar sobre el procedimiento ( puntaje 6 y 8).
  - ❖ **Grado 1B:** se utiliza(n) otra(s) técnica(s) en que no existe regularidad, por lo que se debe reflexionar sobre su procedimiento, ya que para cada ejercicio se debe utilizar una nueva técnica (puntaje 5 y 7).
  - ❖ **Grado 1C:** Existencia de la noción de constante de proporcionalidad, lo que implica menor costo por la regularidad existente, sin embargo no se utiliza de manera formal (puntaje 5 y 7).
- Las preguntas de proporcionalidad inversa son contestadas mecánicamente- puntaje 8, ya que no se produjeron errores y fueron identificadas por todas las alumnas, quienes utilizaron regla de tres; es decir, identifican y ejecutan la técnica mecanizada.

<sup>6</sup> Los subgrados antes descritos no indican una jerarquización.

- En las preguntas de proporcionalidad compuesta se producen mayores “dificultades” en cuanto a la técnica, ya que algunas alumnas debieron utilizar otras técnicas que necesitan mayor reflexión (puntajes 7 y 5 respectivamente).
- Las alumnas de 2° Medio al parecer tienen un recuerdo más reciente del contenido y de la técnica, ello se podría relacionar con que casi todas ellas utilizaron regla de tres para la resolución de los problemas (puntaje 8).
- Las alumnas de 3° Medio, en su mayoría, han olvidado la técnica regla de tres, ya que utilizaron otro tipo de técnicas más reflexivas y menos mecanizadas- la moda es de puntaje 7, sobretodo en la proporcionalidad compuesta; más aún existieron algunos errores en sus cálculos, lo que manifiesta poca cercanía con el contenido.
- Ninguna alumna utilizó la definición de constante de proporcionalidad para resolver los problemas; la gran mayoría utilizó la regla de tres (ver moda en los indicadores del recuadro superior) otras buscaron otras técnicas y reflexionaron para resolver las preguntas (Grado 1B).

(3) **Entrevistas:** hemos generado unidades de análisis, utilizando un criterio temático, en relación al tipo de crítica a utilizar la técnica regla de tres.

	<b>Persona A</b>	<b>Persona B</b>
<b>Pregunta</b>	<b>En contra de la regla de tres</b>	<b>A favor de la regla de tres</b>
<b>Posicionamiento a favor o en contra de la regla de tres</b>	Critica el uso de la regla de tres en contra de ella, ya que admite que es un mero procedimiento y que el concepto queda oculto...	Critica el uso de la regla de tres a favor, ya que lo encuentra un procedimiento eficiente, es decir, rápido y útil.
<b>Cuestionamiento de la técnica</b>	No se cuestiona mayormente el uso de esta técnica, y su validez para la enseñanza.	Encuentra útil la enseñanza de esta técnica, por lo que no hay un cuestionamiento de la transparencia de la utilización de la técnica.

De la entrevista se desprende que los académicos entrevistados no se cuestionan si los procedimientos que se han enseñando durante mucho tiempo son los adecuados para lograr la mejor comprensión del concepto, que es la base del entendimiento del procedimiento.

### **CONCLUSIONES**

Las siguientes conclusiones relacionan el marco teórico de referencia y el análisis de los datos.

- (1) En la enseñanza de la proporcionalidad de magnitudes se utiliza prioritariamente la técnica de *regla de tres*, lo cual contrapone con el currículo oficial chileno vigente que propone cambiar por la técnica *constante de proporcionalidad*.
- (2) La regla de tres permite resolver de manera eficiente los problemas de proporcionalidad de magnitudes, sin embargo oculta la *razón de ser* del procedimiento mecanizado.
- (3) Al enseñar el concepto de proporcionalidad de magnitudes se omiten ejemplos en que las magnitudes no son proporcionales, lo que implica que los estudiantes no logren identificar el concepto de proporcionalidad de manera correcta. Esto nos lleva a pensar que este mecanismo de enseñanza del concepto de proporcionalidad no es eficaz, ya que no siempre se identifica la existencia o no de ésta.

- (4) La enseñanza de la proporcionalidad se sitúa en el primer grado de algebrización, particularmente en el subgrado 1 A.
- (5) La técnica *regla de tres* no permite por sí sola generar una tecnología, ya que para lograr esto se necesita un conjunto de técnicas; por lo cual, la regla de tres no permite algebrizar el contenido de proporcionalidad.
- (6) Una reorganización matemática que explicita la existencia de la constante de proporcionalidad, mejoraría el grado de algebrización de la enseñanza de la proporcionalidad, ya que revela el concepto, que se encontraba oculto “tras” el procedimiento.
- (7) Observamos que no existe un mayor cuestionamiento por parte de profesores universitarios, que colaboran con los libros de texto para la enseñanza media, por la técnica utilizada en la enseñanza de la resolución de problemas que involucran proporcionalidad
- (8) Las organizaciones matemáticas en torno a la proporcionalidad son *puntuales* (Bolea, Bosch, Gascón 2001) e incompletas en las instituciones escolares chilenas, ya que sólo se enseña una técnica: regla de tres.

## REFERENCIAS

- BOLEA, P.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques* vol. 21 n° 3, pp. 247-304.
- BOSCH M; ESPINOZA L.; GASCÓN, J. (2003). El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 23 n°1, pp. 79-136.
- BOSCH M; FONSECA, C.; GASCÓN, J. (2004). Incompletud de las organizaciones matemáticas locales en las Instituciones Escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 24, n° 2-3, pp. 205-250.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*: AIQUE, Buenos Aires.
- CHEVALLARD, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 19, n° 2, pp. 221-266.
- GASCÓN, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la didáctica de las matemáticas, Barcelona.
- GASCÓN, J.; FONSECA, C. (2000). Ausencia de las organizaciones matemáticas locales en las Instituciones Escolares, Barcelona. (Publicado posteriormente en Bosch; Fonseca; Gascón (2004 ))
- FONT, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Revista EMA*, vol. 7, n°2, 127-170.
- MENDOZA, LARA, BENAVIDES (2000). *Matemática 1° Año Medio*, Editorial McGraw-Hill Interamericana. Santiago. Chile.
- RIERA LIRA, G. (1998). *Matemática Aplicada 1° medio*. Editorial Zig- Zag. Santiago. Chile.
- SCHNEIDER, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques; à pros d'un enseignement des limites au secondaire; *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 21 n° 1,2, pp 7-56
- VERGARA, MORENO, LÓPEZ (1999). *Matemática 1° Medio*, Editorial Santillana, Santiago. Chile.