Modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris

Noemí Ruiz[1], Marianna Bosch[2] y Josep Gascón[3]

RÉSUMÉ

Le travail que nous présentons ici est centré sur la création et l'expérimentation d'un *atelier de mathématiques* qui s'appuie sur la combinaison de deux stratégies didactiques. D'une part l'étude d'un problème de modélisation algébrique qui suppose que certaines des grandeurs données initialement se transforment progressivement en paramètres pour pouvoir considérer les relations fonctionnelles entre elles. D'autre part l'usage de la calculatrice symbolique Wiris (www.wiris.com) pour faciliter le travail de création, représentation graphique et manipulation d'expressions algébriques de familles de fonctions qui dépendent d'un ou plusieurs paramètres. Cette expérience s'inscrit dans un travail plus large d'introduction de la modélisation algébrique à la charnière collège-lycée et du rôle que peut y jouer le recours à une calculatrice symbolique comme Wiris.

ABSTRACT

The work presented here focuses on the creation and experimentation of a *mathematical workshop* based on the combination of two didactic strategies. On the one hand, we propose the study of an algebraic modelling problem in which some of the initial magnitudes have to be transformed into parameters in order to consider functional relations between magnitudes. On the other hand, the students are committed to use the symbolical calculator Wiris (www.wiris.com) that facilitates the work of creation, representation and handling of algebraic expressions of functions depending on one or several parameters. This experience takes place in a broader research related to the introduction of algebraic modelling at the transition between secondary school level and college and to the role played by a symbolic calculator like Wiris.

1. INTRODUCCIÓN

Numerosos trabajos de investigación en didáctica de las matemáticas han puesto en evidencia que la ausencia del juego entre parámetros y variables constituye una de las características principales del carácter *prealgebraico* de las matemáticas que se estudian en Secundaria (Chevallard 1984 y 1989, Bolea 2002 y Sutherland *et al.* 2000).

De hecho, en la enseñanza obligatoria las letras juegan únicamente el papel de incógnitas (en las ecuaciones) o de variables (en el lenguaje funcional), pero *los parámetros están prácticamente ausentes*. En consecuencia las *fórmulas* que aparecen en geometría, en matemática comercial, en combinatoria, en estadística e incluso en los diferentes bloques en que se rompe el "álgebra escolar" (como, por ejemplo, las "igualdades notables" o los "polinomios"), hacen exclusivamente el papel de reglas para realizar ciertos *cálculos numéricos.* No aparecen nunca como el *resultado de un trabajo algebraico* ni juegan ningún papel de "modelos algebraicos" en los que las variables y los parámetros sean intercambiables. En particular, la actividad de *nominación* y *renominación* de las variables (esto es, la introducción de nuevas letras en el curso del trabajo matemático), que es esencial en el trabajo algebraico, está prácticamente ausente en el álgebra escolar. Esta situación se prolonga más allá de la secundaria obligatoria cuando se trabaja con las expresiones algebraicas de las funciones elementales, dificultando el estudio de *familias de funciones* y el uso de estas familias como modelos de relaciones entre magnitudes.

[1] Universitat Autònoma de Barcelona. noemirm@mat.uab.es.
[2] Universitat Ramon Llull. mbosch@fundemi.com.
[3] Universitat Autònoma de Barcelona. gascon@mat.uab.es.

Una vez constatada la "robustez" de este fenómeno (Bolea *et al.* 2004), nos planteamos el problema didáctico de *cómo modificar la ecología del sistema de enseñanza de las matemáticas para que sea posible llevar a cabo una verdadera actividad de modelización algebraica* entre el último curso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria o ESO (15-16 años) y en la secundaria post-obligatoria o Bachillerato (16-18). Para avanzar en este sentido, el trabajo que presentamos aquí propone el diseño y la experimentación de un *Taller de matemáticas* que se apoya en la combinación de dos estrategias didácticas:

(a) Proponer el estudio de una cuestión problemática definida inicialmente mediante unos datos fijos (ventas de un producto, dado el precio unitario y los costes de producción), pero *cuyo estudio requiere que éstos se transformen progresivamente en parámetros* y que sea necesario considerar las *relaciones funcionales* entre cuatro variables del sistema: ventas, costes, ingresos y beneficios.

(b) Utilizar la calculadora simbólica Wiris[4] (CSW) para instrumentalizar las técnicas matemáticas necesarias para abordar los tipos de problemas que surgen en esta actividad. Pretendemos aprovechar los recursos de la CSW para facilitar a los alumnos el trabajo de *creación*, *representación gráfica* y *manipulación* de las expresiones algebraicas de familias de funciones dependientes de uno o más parámetros, sin olvidar la *interpretación* de todas estas manipulaciones en el contexto del sistema.

Postulamos que la realización de este trabajo de modelización algebraica y funcional en el tránsito ESO-Bachillerato podría contribuir a cambiar la naturaleza de la propia actividad matemática de los alumnos y puede construirse como una posible "razón de ser" del cálculo del Bachillerato, esto es, del estudio de familias de funciones elementales con ayuda del cálculo diferencial e integral.

Antes de describir en detalle la experimentación realizada, presentamos un estudio a priori de los modelos matemáticos involucrados en el taller. Esto nos permitirá, por un lado, mostrar el "potencial" de la situación considerada –aunque éste no aparezca siempre suficientemente "explotado" en la realización concreta del taller– y, por otro lado, nos proporcionará el material matemático mínimo para la descripción sucinta de la experimentación.

2. ANÁLISIS A PRIORI DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS

Partiremos de un *sistema económico* (la producción y venta de camisetas por parte de una asociación juvenil), en el que se plantea la cuestión de cómo conseguir un determinado beneficio. El estudio de esta cuestión da lugar a un proceso de modelización algebraica y funcional[5] en el que el juego entre parámetros y variables adquiere una importancia esencial. Presentamos a continuación un esquema del sistema considerado y del proceso de modelización.

Inicialmente, el sistema puede caracterizarse por la consideración de 4 magnitudes variables: el número de productos fabricados y vendidos (x), el ingreso por la venta de estos productos (I), los costes derivados de la producción (C) y los beneficios (B). La notación introducida indica que consideramos las ventas x como la variable independiente del sistema y las demás variables como funciones de la primera: $I = I(x)$, $C = C(x)$, $B = B(x)$. Estas tres últimas funciones están relacionadas entre sí por la igualdad: $B(x) = I(x) - C(x)$.

[4] Disponible de forma gratuita en la red http://calculadora.edu365.com.

[5] Utilizamos la expresión "modelización funcional" en el sentido de producción de modelos en los que intervienen relaciones funcionales entre magnitudes variables. Para más detalles, ver F. J. García (2005).

En principio, si consideramos las ventas x de un único producto, la función de ingresos viene dada por la relación $I(x) = p{\cdot}x$, siendo p el precio de venta unitario del producto.

En lo que concierne a la función de costes, hay varias posibles modelizaciones. La hipótesis más simple es que los costes dependan linealmente de x, $C(x) = c{\cdot}x + L$ siendo c el coste unitario del producto y L otros posibles costes fijos (alquiler del local en el caso aquí considerado). Pero también tiene sentido considerar otro tipo de funciones, por ejemplo suponiendo que el coste unitario no es fijo sino que crece linealmente con x, lo que da lugar a una función cuadrática del tipo: $C(x) = (c + \alpha x)x + L$. El coeficiente α es un valor "pequeño" del tipo $1/K$ con $K > 0$ de tal modo que, para valores de x muy inferiores a K, αx es despreciable y los costes son casi lineales, apareciendo el crecimiento cuadrático para ventas "grandes". Distinguiremos aquí los dos casos (costes lineales y costes cuadráticos), considerando siempre la función de ingresos $I(x) = p{\cdot}x$.

2.1. El caso de la función de costes lineal

Trabajamos con un modelo compuesto por tres funciones:

1. La función de ingresos $I(x) = p{\cdot}x$ donde p es el precio unitario del producto.
2. La función de costes $C(x) = c{\cdot}x + L$ donde c es el coste por unidad de producto y L el alquiler del local.
3. La función de beneficios $B(x) = I(x) - C(x) = (p - c){\cdot}x - L$.

Económicamente una primera información relevante es el número de unidades x_0 para las que tenemos un beneficio fijado (es decir $B(x_0) = I(x_0) - C(x_0) = B_0$). Estudiaremos cómo disminuir x_0 para obtener el beneficio deseado con menores ventas. Para descifrar la relación entre las tres funciones y calcular la mínima cantidad de unidades para las que se obtiene el beneficio B_0. Llevaremos a cabo dos estudios complementarios: uno basado en los cambios de las diferentes gráficas y otro en las manipulaciones de las expresiones algebraicas de las funciones consideradas.

(a) Estudio de la mínima cantidad de ventas x_0 tal que $B(x_0) \geq B_0$

El número de ventas necesarias para tener un beneficio fijado B_0 se puede obtener de la igualdad $B(x) = I(x) - C(x) = B_0$. Gráficamente se tiene que determinar la intersección de la curva $y = B(x)$ con la recta $y = B_0$. Se observa entonces que una posible manera de "mover" el punto x_0 es aumentar la inclinación de la recta $I(x)$ (y por lo tanto de la recta $B(x)$), es decir aumentar el precio de venta de cada unidad (p). Otra posibilidad es disminuir el precio de coste de cada unidad (c). Gráficamente el cambio de la inclinación de la recta costes (y por lo tanto de la recta $B(x)$) provoca una traslación horizontal en el punto x_0. Finalmente, disminuyendo el precio del alquiler (L) se produce una traslación vertical de la recta beneficio, lo que provoca que x_0 se desplace hacia la izquierda: también aquí se empieza a obtener el beneficio deseado con menos ventas. Algebraicamente, x_0 se obtiene resolviendo la ecuación lineal $(p - c){\cdot}x - L = B_0$ que tiene por solución: $x = \dfrac{L + B_0}{p - c}$. Llegados a este punto podemos interpretar x como una nueva función de variables independientes p, c y L. Estudiaremos cómo depende x de cada una de estas variables.

(b) Estudio de la función $x(p) = \dfrac{L + B_0}{p - c}$

Suponiendo fijados el precio de coste c y el alquiler L, vamos a estudiar como afecta una variación del precio de venta p al número de unidades que hay que vender para obtener un beneficio B_0 fijado. La CSW permite representar la función $x(p) = (L + B_0)/(p - c)$, hipérbola con asíntota vertical en $p = c$ (recordemos que sólo consideramos el caso $p > c$) y asíntota horizontal en $x = 0$ (Fig. 1).

La curva nos indica que si el precio de venta p aumenta indefinidamente la cantidad de ventas necesarias para tener un beneficio B_0 tiende a cero. Y si p es cercano al precio de coste c entonces el número de unidades a vender aumenta indefinidamente.

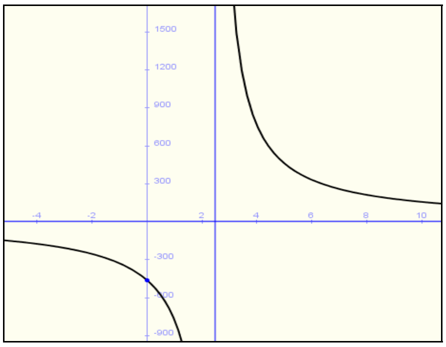


Fig. 1: Gráfica de: $x(p) = (L + B_0)/(p - c)$ donde $c = 2.5$, $L = 150$ y $B_0 = 1000$

(c) Estudio de la función $\boldsymbol{x(c) = \dfrac{L + B_0}{p - c}}$

La gráfica de la función $x(c) = (L + B_0)/(p - c)$ es una hipérbola con asíntota vertical en $c = p$ y asíntota horizontal en $x = 0$ (Fig. 2). La curva nos indica que el precio de coste c no puede ser superior a p, por lo tanto $0 \leq c < p$. Si c tiende a cero, la cantidad de ventas necesarias para tener un beneficio de B_0 tiende a $(L + B_0)/p$. Por lo tanto, $x \geq (L + B_0)/p$, obteniéndose así una cota mínima de las ventas.

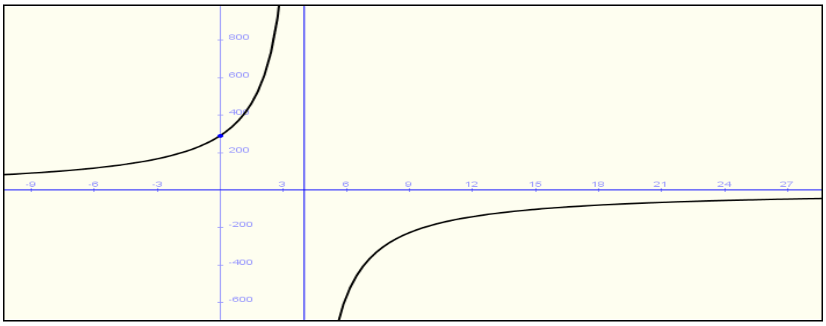


Fig. 2:
Gráfica de $x(c) = (L + B_0)/(p - c)$
con $p = 4$, $L = 150$ y $B_0 = 1000$

(d) Estudio de la función $\boldsymbol{x(L) = \dfrac{L + B_0}{p - c}}$

La gráfica de la función $x(L) = (L + B_0)/(p - c)$ es una recta que solo tiene sentido para $L \geq 0$ (Fig. 3). Y, como en el caso anterior, se obtienen unas ventas mínimas que corresponden al caso extremo $L = 0$: $x \geq B_0/(p - c)$.

Siendo realistas, el precio de coste c y el del alquiler L serán valores fijados de antemano y seguramente tendremos poca incidencia sobre ellos. En lo que se refiere a las ventas, se debería poder fijar un intervalo de ventas "posibles", por ejemplo a partir de un trabajo estadístico previo sobre las ventas de meses anteriores (estudio de previsión de ventas).

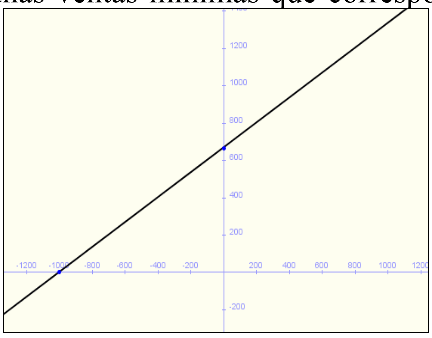


Fig. .3: Gráfica de $x(L) = (L + B_0)/(p - c)$ con $p = 4$, $c = 2.5$ y $B_0 = 1000$.

En definitiva resulta que nuestro margen de maniobra reside, casi exclusivamente en el precio de venta p. Es necesario por lo tanto estudiar su relación con los otros parámetros.

(e) Estudio de la variación del precio de venta p en función de la cantidad x de ventas

Vamos a estudiar cómo determinar el precio de venta p en función de las ventas, fijados el precio de coste (c), el alquiler (L) y el beneficio B_0. La relación entre estas variables se escribe ahora como $p(x) = c + \dfrac{L + B_0}{x}$ (Fig. 4), cuya gráfica es una hipérbola con asíntota vertical en $x = 0$ y asíntota horizontal en $p = c$.

La curva indica que si las ventas x aumentan, p disminuye aunque nunca será inferior al valor de c. Y si x es cercano a cero entonces el precio de venta p se dispara.

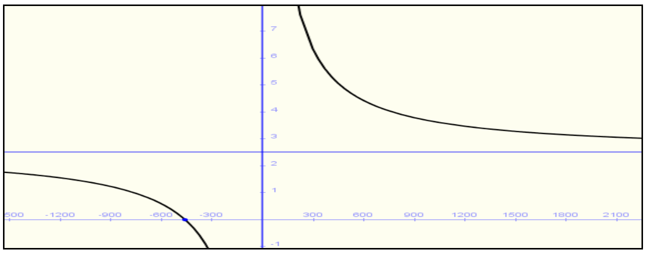


Fig. 4: Gráfica de la función $p(x) = c + (L + B_0)/x$ con $c = 2.5$, $L = 150$ y $B_0 = 1000$.

Según la fórmula, el precio de venta aparece como el coste unitario más un sumando: la cantidad $B_0 + L$ que se quiere ingresar "repartida" entre las ventas x: es decir, el "ingreso unitario" necesario una vez eliminado el coste por unidad.

(f) Estudio de la diferencia p – c

El estudio anterior pone de manifiesto que el margen de maniobra, si lo hay, reside esencialmente en el término $p - c = (L + B_0)/x$. Dicho en otras palabras, la función que nos interesa estudiar es la diferencia $p - c$ que indica el aumento a aplicar al coste unitario para obtener los ingresos deseados. Según qué parámetros den más juego (sean más fácilmente modificables) se obtendrá la "política de precios" a aplicar.

Detendremos aquí el estudio para abordar a continuación el caso cuadrático.

2.2. El caso de la función de costes cuadrática

Trabajaremos con un modelo compuesto por tres funciones:

1. La función de ingresos $I(x) = p \cdot x$ donde p es el precio de venta.
2. La función de costes $C(x) = (c + \alpha x) \cdot x + L = \alpha x^2 + cx + L$, donde c es el coste unitario del producto, L el alquiler del local y α el "coeficiente de riesgo" para ventas grandes.
3. La función de beneficios $B(x) = I(x) - C(x) = -\alpha x^2 + (p - c) \cdot x - L$.

En este caso, la función $C(x)$ es una parábola con vértice en $x = -c/(2\alpha)$ y $C(0) = L$. La función $B(x)$ es una parábola invertida con vértice en $x = (p - c)/(2\alpha)$ y $B(0) = -L$. Dibujando estas funciones para valores concretos de p, c, α y L, podremos concluir que el intervalo $[x_0, x_1]$, delimitado por los cortes de la curva $y = B(x)$ con la recta $y = B_0$, corresponde a las ventas para las cuales se consigue el beneficio fijado ($B(x) \geq B_0$).

Para ventas "pequeñas", el modelo de costes cuadrático puede considerarse equivalente al modelo lineal. Por este motivo centraremos el estudio para ventas "grandes", esto es, para valores de x tales que αx^2 sea "significativo" (por ejemplo, $\alpha x^2 > 1$). Para descifrar la relación entre las tres funciones y la longitud del intervalo de ventas con beneficio deseado vamos ha realizar también aquí dos estudios complementarios: uno gráfico y otro algebraico. Consideraremos siempre que α viene determinado por el sistema económico en el que nos situamos y es, por lo tanto, un valor fijo.

***(a) Estudio gráfico del intervalo de ventas* $[x_0, x_1]$ *en el cual* $B(x) \geq B_0$**

Como en el caso lineal, una posible manera de "mover" los puntos x_0 y x_1 (y, en particular, la distancia entre ellos) es aumentar el precio unitario de venta (p) (Fig. 5). Otra posibilidad es disminuir el coste unitario (c). Gráficamente cambia la posición del vértice de la parábola $C(x)$ (sufre una translación vertical y hacia la derecha), creando una mayor amplitud del intervalo $[x_0,x_1]$ y, además, se obtienen beneficios con menores ventas (Fig. 6).

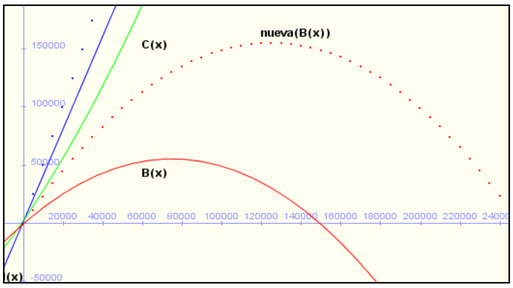


Fig. 5

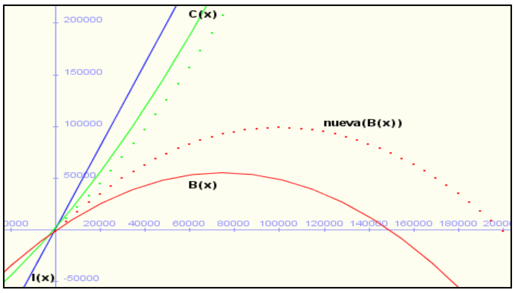


Fig. 6

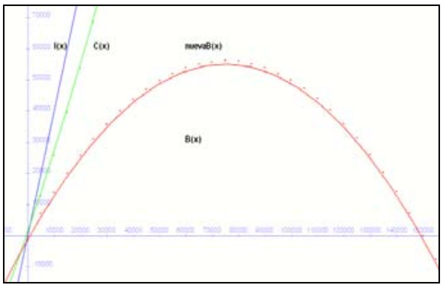


Fig. 7

La última posibilidad es disminuir el precio del alquiler (L). Gráficamente se produce una traslación vertical de la función costes, lo que provoca que x_0 se desplace hacia la izquierda y x_1 hacia la derecha. También aquí se empieza a obtener beneficios con un número menor de ventas (Fig.7).

(b) Estudio analítico del intervalo de ventas [x_0, x_1] en el cual $B(x) \geq B_0$

Algebraicamente se puede determinar las ventas necesarias para lograr un beneficio fijado B_0 resolviendo la igualdad: $B(x) = I(x) - C(x) = B_0$

cuya solución es: $x = \dfrac{p - c \pm \sqrt{(p-c)^2 - 4\alpha(L + B_0)}}{2\alpha}$. Esta solución sólo tiene sentido si el discriminante es positivo ($(p-c)^2 - 4\alpha(L + B_0) > 0$). El beneficio máximo $B_{max} = (p - c)^2 /4\alpha - L$ corresponde a unas ventas $x = (p - c)/2\alpha$.

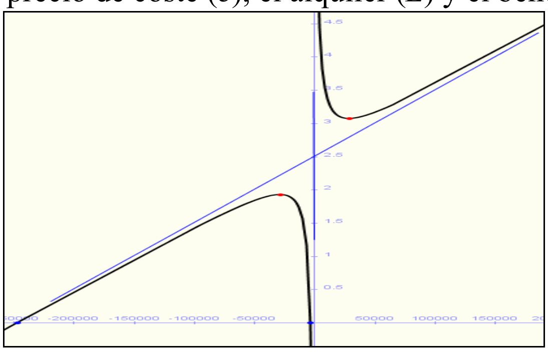
Llegados a este punto, y siguiendo los resultados del caso lineal, se observa que resulta más interesante considerar como variable independiente la diferencia $d = p - c$.

(c) Estudio de la función x(d)

Del estudio anterior se obtiene $x(d) = \dfrac{d \pm \sqrt{d^2 - 4\alpha(L + B_0)}}{2\alpha}$, función definida sólo para $d > \sqrt{4\alpha(L + B_0)}$, diferencia mínima que se puede considerar. En este caso, el número de unidades que deben venderse para obtener el beneficio B_0 fijado deber ser mayor que $\dfrac{d}{2\alpha}$, es decir $x > \dfrac{\sqrt{L + B_0}}{\sqrt{\alpha}}$.

(d) Estudio del precio de venta p en función de la cantidad de ventas x

Vamos a estudiar cómo determinar el precio de venta p en función de las ventas, fijados el precio de coste (c), el alquiler (L) y el beneficio B_0.



La gráfica de la función $p(x) = c + (L + B_0)/x + \alpha x$ (Fig.8) es una hipérbola con asíntota vertical en $x = 0$ y asíntota oblicua en $p = \alpha x + c$.

Fig. 8: Gráfica de $p(x) = c + (L + B_0)/px + x\alpha$ con $c = 2.5$, $\alpha = 10^{-5}$, $L = 1200$ y $B_0 = 7000$.

Para valores de x muy grandes, el término $(L + B_0)/x$ es despreciable y la diferencia entre p y c resulta casi proporcional a las ventas x, siendo α el coeficiente de proporcionalidad. Además, existe una producción x_m para la cual el precio alcanza un mínimo $p_m = c + 2\sqrt{\alpha(L + B_0)}$, valor que corresponde a unas ventas de $x_m = \sqrt{(L + B_0)/\alpha}$.

3. UN POSIBLE PROCESO DE ESTUDIO

La situación anterior puede concretarse considerando, por ejemplo, los datos concretos de un negocio de venta de camisetas por parte de un grupo de alumnos que desean conseguir los 1000 € que faltan para el viaje de fin de curso. De forma más general, se plantea la cuestión de la "viabilidad" del negocio, en el sentido de considerar si las camisetas son o no un buen producto para obtener los beneficios deseados. En un segundo apartado, consideraremos la misma cuestión en el caso de un negocio "al por mayor" en el que los costes unitarios no son constantes sino que crecen linealmente con las ventas (función de costes cuadrática).

3.1. Venta de camisetas en las fiestas de la escuela

Supongamos que disponemos de los costes e ingresos por la venta de camisetas que obtuvieron, en circunstancias similares, grupos de alumnos de cursos anteriores (vendiendo las camisetas en 3 fiestas trimestrales por curso).

CURSO	03/04			04/05		
TRIMESTRE	1	2	3	1	2	3
Camisetas vendidas	70	180	120	160	114	
Costos Totales (en €)	325	600	450	285	400	
Ingresos Totales (en €)	280	720	480	456	640	
Beneficios (en €)	-45	120	30	71	240	

Apuntaremos a continuación, de forma sucinta, un posible recorrido de estudio a través de las cuestiones que podrían surgir a partir de la situación considerada y de las respuestas provisionales que se van aportando. Del análisis de los datos, se obtienen las condiciones iniciales del negocio: coste unitario constante $c = 2.5$ €, precio unitario constante $p = 4$ € y coste fijo (alquiler de la parada) $L = 150$ €.

> **Q_0 :** En las condiciones iniciales ¿es posible obtener en la última fiesta del curso 04/05 un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas? **R_0:** En estas condiciones sería necesario vender $x = 767$ camisetas (cf. 2.1*a*) lo que, a la vista de los datos de la tabla, parece una venta poco probable de realizar.

La solución negativa a **Q_0** plantea la necesidad de modificar algunos de los datos de la situación inicial, que pasarán así a hacer el papel de *parámetros* de la situación. Surge entonces la cuestión **Q_1** siguiente:

> **Q_1 :** ¿Es posible obtener los beneficios deseados modificando alguna de las variables de la situación: precio unitario, coste unitario o coste fijo (alquiler)?

Que se concreta en las cuestiones:

> **Q_{11} (*p* como único parámetro libre):** Si suponemos que los costes son inamovibles ($c = 2.5$ y $L = 150$), ¿cuánto deberíamos aumentar el precio inicial de venta ($p = 4$) para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)?

> **Q_{12} (*c* como único parámetro libre):** Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, el precio de venta no puede superar el valor inicial de $p = 4$ € y que no podemos conseguir un alquiler más barato de $L = 150$, ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial de una camiseta ($c = 2.5$) para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)?

Q_{13} (*L* como único parámetro libre): Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, es imposible disminuir el precio de compra ($c = 2.5$) y aumentar el precio de venta ($p = 4$), ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial del alquiler del local ($L = 150$) para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)?

Las respuestas a las tres cuestiones anteriores muestran que, mediante la modificación de *un solo parámetro*, no se obtiene el beneficio deseado con un número razonable de ventas. Surge así $\mathbf{Q_2}$ que plantea la necesidad de considerar la variación conjunta de dos parámetros.

Q_{21} (*c* y *L* como parámetros libres): Si decidimos no modificar el precio de venta $p = 4$, ¿qué *relación* debería darse entre los valores de c y L para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)? ¿Existen pares de valores "razonables" de c y L que cumplan esas condiciones?[6]

R_{21}: Para obtener 1000 € de beneficio vendiendo 300 camisetas el coste de las 300 camisetas ha de ser de 200 € ($300\,c + L = 200$). Se obtiene así una relación afín entre los parámetros L y c ($c = 2/3 - L/300$ cf. 2.1*c* y 2.1*d*)) que pone en evidencia la inexistencia de valores "razonables" (para $L > 0$ se tiene $c < 2/3$).

Q_{22} (*p* y *L* como parámetros libres): Si fijamos el precio de coste $c = 2.5$ €, ¿qué *relación* debería darse entre los valores de p y L para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)? ¿Existen pares de valores "razonables" de p y L que cumplen esas condiciones?

R_{22}: En estas condiciones la relación entre p y L ($p = 2.5 + 10/3 + L/300$) indica que, a cualquier valor razonable del alquiler ($L > 0$), le corresponde un precio "alto" $p > 5.8$ (cf. 2.1*b*).

Q_{23} (*c* y *p* como parámetros libres): Supongamos que el precio del alquiler $L = 150$ es inamovible, ¿qué *relación* debería darse entre los valores de p y c para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)? ¿Existen pares de valores "razonables" de c y p que cumplen esas condiciones?

R_{23}: En caso de vender el máximo de camisetas ($x = 300$) en estas condiciones, la diferencia entre el precio de venta y el de compra de una camiseta ha de ser, como mínimo: $p - c = 3.83$. Esta relación comporta que, para obtener un beneficio de 1000 €, cualquier valor razonable del precio de compra ($c > 1$) impone que el precio de venta p esté entre 4.83 y 5 (cf. 2.1*f*).

Esta última respuesta muestra, por primera vez, que se pueden obtener valores razonables para todos los parámetros. La diferencia $p - c$ aparece aquí como el parámetro interesante a considerar.

Q_3 (Los tres parámetros libres): ¿Qué cambios habría que realizar en las condiciones iniciales ($c = 2.5$, $p = 4$ y $L = 150$), dentro de los valores razonables de los parámetros, para obtener un beneficio de 1000 € vendiendo un número razonable de camisetas ($x < 300$)?

R_3: Se puede llevar a cabo un estudio exploratorio con Wiris, ya sea variando las gráficas (estudio aproximado) o realizando cálculos algebraicos (con valores exactos). La *situación límite* más favorable se da cuando $c = 1$ y $L = 0$ son mínimos y $p = 5$ es máximo. En ese caso, se obtiene una cota inferior de las ventas en $x = 250$ camisetas. A partir de aquí se pueden hallar otros valores para los tres parámetros que también son solución (por ejemplo $p = 5$, $c = 1.1$ y $L = 160$ o bien $p = 4.9$, $c = 1.05$ y $L = 155$).

Resulta, en definitiva, que una solución razonable a la cuestión $\mathbf{Q_0}$ requiere que los parámetros cumplan $(p - c)\cdot 300 - L \geq 1000$ o, de forma equivalente,

$$p - c \geq 10/3 + L/300.$$

Esta última forma proporciona el criterio de actuación: al coste unitario hay que añadirle 10/3 € más el alquiler "repartido" entre las 300 camisetas vendidas.

3.2. Otras cuestiones por explorar

Hasta aquí hemos considerado únicamente aquellas cuestiones cuyo estudio involucraba modelos matemáticos algebraicos y gráficos. De todos modos, a partir de la tabla de datos

[6] En adelante consideraremos como valores "razonables" $p < 5$, $c > 1$ y $L > 0$.

inicial, es pertinente plantear otros tipos de cuestiones, sin duda menos “curriculares”, pero tal vez más espontáneas y con una utilidad totalmente comparable. Nos referimos, en particular, al problema que llamaremos del “contraste de los datos”, cuyo estudio habría que realizar de manera paralela al recorrido anterior y para el que se requieren sin duda datos, conocimientos e informaciones más complejas que las presentadas hasta ahora. Lo mencionaremos aquí de forma breve dejando el trabajo exploratorio al lector.

C_0 **(Contraste de datos):**

Coste unitario: ¿Es caro comprar las camisetas a 2.5 €? ¿Se pueden obtener más baratas al por mayor? ¿Qué condiciones de compra nos imponen? ¿Habrá problemas de stock?

Precio unitario: Un precio entre 4 y 5 € parece muy bajo. ¿Se podrían vender más caras? ¿A qué precio las venden las escuelas del barrio? ¿Qué ocurrirá si se aumenta un poco el precio? ¿Hasta qué punto se verán afectadas las ventas? ¿Qué efecto sobre el beneficio tendría un aumento del precio del 10%? ¿Y una disminución del 10%? ¿Qué efecto sobre las ventas?

Ventas: ¿Se pueden obtener más datos sobre las ventas de camisetas de cursos anteriores? ¿Cómo hacer una previsión de ventas fiable? ¿Qué datos se necesitan?

Tipo de producto: ¿Qué otro tipo de producto se puede vender? ¿Qué características tiene? ¿La venta de camisetas es una buena estrategia o es mejor buscar productos de menor coste?

3.3. Venta de camisetas al por mayor

La segunda situación que consideramos involucra el modelo de costes cuadráticos presentados en la sección 2.2. Consiste en considerar la venta de grandes cantidades de camisetas (entre 300 y 3000), situación que supone un aumento lineal del coste unitario.

MES	Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
x	886	900	1.093	2.450	1.660	2.670
C	3.422,85	3.458,10	3.944,45	7.385,03	5.377,56	7.946,29
I	3.544	3.600	4.372	9.800	6.640	10.680

Disponemos de los costes e ingresos de una tienda de deportes durante los últimos meses:

Los datos muestran que los ingresos provienen de las ventas a un precio unitario constante $p = 4$ € y que los costes no varían linealmente con las ventas. La nueva función de costes viene dada por la expresión: $C(x) = (c + \alpha x)\cdot x + L$ con $\alpha = 10^{-5}$, $c = 2.5$ (coste unitario para ventas pequeñas) y $L = 1200$ (parte del coste fijo imputado a las camisetas). Si consideramos que α es significativo cuando modifica el coste global en 1 € como mínimo, entonces resultará que: $\alpha x^2 > 1 \Rightarrow x^2 > 10^5 \Rightarrow x > 317$.

Esto significa que, en las condiciones indicadas, α empezará a ser significativo para ventas de más de 317 camisetas. Por tanto, en lo que sigue utilizaremos este modelo cuadrático para estudiar el caso en que la cantidad de camisetas vendidas sea “grande” ($x > 317$).

El estudio podría seguir considerando las cuestiones que presentamos a continuación sin mayor comentario.

Q’$_0$: En las condiciones iniciales ($c = 2.5$, $p = 4$, $L = 1200$ y $\alpha = 10^{-5}$) ¿Es posible obtener un beneficio de 7000 € vendiendo un número razonable de camisetas?

R’$_0$: Se necesitaría vender unas 5682 camisetas para obtener los 7000 € de beneficio. Se obtiene otra solución (144318 camisetas) que está mucho más lejos de la capacidad de producción del nuevo taller (cf. 2.2*a* y 2.2*b*).

Q’$_{01}$: ¿Cómo varía el intervalo [5682, 144318] de ventas en el que el beneficio es mayor o igual que 7000 € al modificar los valores de los parámetros? Por ejemplo, ¿cómo cambia dicho intervalo si conseguimos disminuir el precio de compra de 2.5 € a 2 €, dejando invariantes los valores de los demás parámetros? ¿Y si aumentamos el precio de venta de 4 a 5 €? ¿Y si, por último, conseguimos rebajar el precio del alquiler de 1200 a 900 €?[7]

Q'$_{02}$: ¿Cómo varía la cantidad de camisetas que habría que vender para obtener *beneficio máximo* (suponiendo que la capacidad de producción fuese ilimitada) al modificar los valores de los parámetros? Por ejemplo, ¿para qué cantidad de camisetas se obtiene el máximo beneficio en las condiciones iniciales? ¿Y si modificamos sucesivamente los valores de los parámetros tal como indica la cuestión anterior Q'$_{01}$?

R'$_{02}$: En las condiciones iniciales el beneficio máximo se obtendría para una venta de x = 75000 camisetas (cf. 2.2*b*).

Q'$_{11}$ (p como único parámetro libre): Si suponemos que los costes son inamovibles (c = 2.5 y L = 1200), ¿cuál debería ser el precio de venta p para obtener un beneficio de 7000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 3000)?

R'$_{11}$: Para obtener 7000 € de beneficio vendiendo 3000 camisetas en estas condiciones se necesitaría aumentar el precio de venta, como mínimo, hasta 5.26 €. Este valor está fuera de los precios considerados comercialmente "razonables" (5.26 > 5) aunque está bastante cerca (cf. 2.2*d*).

Q'$^*_{11}$: ¿Cuánto habría que sobrepasar la producción límite de 3000 camisetas para conseguir que el precio de venta p estuviese dentro de los márgenes razonables (p < 5)? ¿Cómo depende el precio de venta p de la producción necesaria para obtener en estas condiciones un beneficio de 7000 €? Por ejemplo, si la producción aumenta 100 unidades, ¿cómo repercute en el precio necesario para seguir obteniendo el beneficio de 7000 €? En concreto, ¿cuándo disminuye p si x aumenta de 100 a 200 camisetas? ¿Y si x aumenta de 1000 a 1100 camisetas?

R'$^*_{11}$: Como mínimo hay que aumentar la producción en más de 325 camisetas para que el precio sea razonable. En estas condiciones la relación entre la cantidad de camisetas x y el precio de venta p ha de ser: $p = 2.5 + 82000/x + 10^{-5}\cdot x$ (ver apartado (cf. 2.2*d*).

Se puede comprobar que la variación relativa de la función $p(x)$ en el intervalo [100, 200] es de –0.41, mientras que en el intervalo [1000, 1100] es de –0.0075 (muy próxima a cero).

Q'$^{**}_{11}$: Recíprocamente, ¿cómo depende la cantidad x de camisetas que deben venderse para obtener un beneficio de 7000 € del precio p al que deben venderse?

R'$^{**}_{11}$: La relación entre p y x debe ser: $x = 5000\cdot p - 12500 \pm \sqrt{p^2 - 5\cdot p + 2.97}$ (cf. 2.2*c*)

Q'$_{12}$ (c como único parámetro libre): Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, el precio de venta no puede superar el valor inicial de p = 4 € y que no podemos conseguir un alquiler más barato de L = 1200 €, ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial de una camiseta (c = 2.5) para obtener un beneficio de 7000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 3000)?

Q'$_{13}$ (L como único parámetro libre): Si suponemos que, por cuestiones de competencia comercial, es imposible disminuir el precio de compra (c = 2.5) y amentar el precio de venta (p = 4), ¿cuánto deberíamos disminuir el coste inicial del alquiler del local (L = 1200) para obtener un beneficio de 7000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 3000)?

Igual que en el caso lineal se llega a la conclusión que el parámetro interesante a considerar es la diferencia $p - c$ y que así se pueden obtener valores razonables para todos los parámetros.

Q'$_3$ (c y p como parámetros libres): Supongamos que el precio del alquiler L = 1200 es inamovible, ¿qué *relación* debería darse entre los valores de p y c para obtener un beneficio de 7000 € vendiendo un número razonable de camisetas (x < 3000)? ¿Existen pares de valores "razonables" de c y p que cumplen esas condiciones?

R'$_3$: En caso de vender el máximo de camisetas en estas condiciones, la diferencia entre el precio de venta y el de compra ha de ser, como mínimo: $d = p - c = 2.77$ (cf. 2.2*d*). Esta relación comporta que, para obtener un beneficio de 7000 €, hemos de ajustar mucho los precios de compra (que debe estar próximo al mínimo razonable, c = 2) y de venta (que debe estar próximo al máximo razonable, p = 5). Existen parejas de valores razonables que permiten obtener un beneficio de 7000 € (y hasta

---

[7] En adelante consideraremos como valores "razonables" $p < 5$, $c > 2$ y $L > 0$.

un poco mayor) con una venta de 3000 camisetas. Podemos tomar, por ejemplo, $p = 4.90$ y $c = 2.10$; tenemos $p - c = 2.80 > 2.76$ y un beneficio de $B(3000) = 7110 > 7000$.

En resumen, el estudio llevado a cabo nos proporciona, también aquí, la política a seguir en función del número de camisetas que se espera poder vender.

4. LA EXPERIMENTACIÓN: el *Taller de matemáticas con Wiris*

Los análisis anteriores constituyen el fundamento del diseño y realización de un Taller de Matemáticas con la calculadora simbólica Wiris (CSW) para alumnos de Secundaria. Al diseñar el taller, consideramos la CSW como un instrumento que debía disminuir la dificultad de ciertas tareas problemáticas o demasiado costosas para los alumnos como, por ejemplo, dibujar gráficas con precisión, resolver algunos tipos de ecuaciones o realizar determinadas manipulaciones algebraicas. Esta “desproblematización” de algunas tareas debía facilitar el trabajo exploratorio y experimental, al proporcionar a los alumnos una vía fácil para representar rápidamente muchas gráficas de funciones en un mismo gráfico, para calcular rápidamente imágenes y anti-imágenes de funciones y resolver ecuaciones fácilmente. Suponíamos además que la calculadora podría fomentar el planteo de preguntas sobre los modelos utilizados, la interpretación de los resultados, las justificaciones y evaluaciones de los procedimientos, es decir el trabajo de interpretación y “retorno” al sistema inicial considerado.

4.1. Condiciones de la experimentación

La experimentación se realizó en el marco del proyecto ARIE04[8] financiado por la Generalitat de Catalunya, en dos Institutos de Enseñanza Secundaria de las cercanías de Barcelona. Se seleccionó el curso de 1º de Bachillerato científico (16-17 años) del IES Ciutat Badia (formado por tan sólo 7 alumnos), un curso de 4º de ESO (formado por 23 alumnos de 15-16 años) y la asignatura de Ampliación de Matemáticas que se imparte en 1º de Bachillerato (formado por 3 alumnos) del IES Vall Hebrón.

La experimentación se realizó durante el tercer trimestre del curso 2004/05 de forma simultánea en los tres grupos anteriores, en las clases habituales de matemáticas. El taller consistía en 7 unidades o “sesiones” de distinta duración y un examen final (aunque el grupo de 4º ESO realizó dos exámenes). La duración total del taller varió en función de las condiciones particulares de cada grupo, entre 15 y 28 horas.[9]

4.2. Desarrollo de la experimentación

En la primera sesión (1 hora) se introdujo la situación económica descrita en el apartado 2.1 junto con la cuestión inicial $\mathbf{Q_0}$ formulada en el apartado 3, fijando como condiciones iniciales $p = 4$ €, $c = 2.5$ €, $L = 150$ € y $B_0 = 1000$ €; sin hacer mención en ese momento de los rangos razonables de los parámetros. Este trabajo se realizó sin ordenador y en grupo. Para invalidar la respuesta dada por los alumnos sobre el número inicial de camisetas que seria necesario vender, se les proporcionó una tabla con ventas de meses anteriores en los que el valor no superaba nunca las 300 unidades. En este punto se preguntó cómo se podría aumentar el beneficio vendiendo menos de 300 camisetas. Las propuestas de los alumnos se convirtieron entonces en el motor de desarrollo del modelo que se había construido.

---

[8] “Ajut per al desenvolupament de projectes de recerca i innovació en matèria educativa i d’ensenyament formal i no formal”, Agència de Gestió d'Ajuts Universitaris i de Recerca, Generalitat de Catalunya.

[9] El material y los informes de la experimentación están accesibles en la página web del grupo: http://www.wiris.com/mambo/

La segunda sesión (2 horas) estuvo orientada a que los alumnos se familiarizasen y adquiriesen soltura con el entorno y las órdenes de la Calculadora Simbólica Wiris. Se les propuso que la utilizaran para realizar tareas relacionadas con el modelo construido en la sesión previa y que podían responderse sin la herramienta informática.

En la tercera y cuarta sesiones se llevó a cabo la variación de cada uno de los tres parámetros (p, en la pregunta $\mathbf{Q_{11}}$; c en $\mathbf{Q_{12}}$ y L, en $\mathbf{Q_{13}}$). Para ello se realizó un estudio gráfico a partir de casos particulares, pero no se trabajaron suficientemente las nuevas relaciones funcionales. En ningún momento del proceso de estudio se llevó a cabo un estudio estadístico ("control de datos"). En su defecto, y para generar la aparición de las cuestiones $\mathbf{Q_{11}}$, $\mathbf{Q_{12}}$ y $\mathbf{Q_{13}}$ (formuladas en el apartado 3), se optó por ir introduciendo restricciones paulatinamente sobre el sistema dado: el precio de venta p ha de ser inferior a 5 €, el precio de coste unitario c ha ser superior a 1 € y el alquiler será siempre positivo ($L > 0$).

En la quinta y sexta sesiones se estudió la variación conjunta de dos parámetros para responder a las cuestiones $\mathbf{Q_{21}}$ (c y L), $\mathbf{Q_{22}}$ (p y L) y $\mathbf{Q_{23}}$ (c y p). En este estudio se utilizaron gráficos interactivos. Como en las sesiones anteriores, hubo un trabajo insuficiente con las relaciones funcionales que aparecían.

En la última sesión podemos diferenciar dos partes: en la primera se hizo un resumen de las restricciones y resultados obtenidos en todas las sesiones anteriores y la segunda se dedicó al trabajo del modelo funcional con los tres parámetros (p, c y L).

En un principio, pretendíamos que los alumnos complementaran el uso de la CSW mediante un trabajo algebraico con lápiz y papel. En la práctica esta complementariedad no fue posible porque sólo excepcionalmente algunos alumnos de Bachillerato utilizaron el dispositivo "lápiz y papel" para realizar un trabajo algebraico. Los alumnos trabajaron de forma individual y evolucionaba a ritmos distintos. Esta diversidad en los ritmos de trabajo dificultó la puesta en común de los resultados y el análisis conjunto de las conclusiones, por lo que no fue posible hacer una evaluación de dichos resultados y planificar conjuntamente la evolución del taller. Frente a esta situación se decidió proporcionar a cada alumno una tabla en blanco con la cabecera siguiente:

	Precio	*Coste*	*Alquiler*	*Ingresos*	*Costes*	*Beneficios*	
SESIÓN	*p*	*c*	*L*	*I*(*x*)	*C*(*x*)	*B* = *I* – *C*	Objetivos y resultados
1	4	2.5	150	4·*x*	2.5·*x* + 150	1.5·*x* – 150	*O: Tener 1000 € de beneficio* *R: Vender 767 camisetas*

Los alumnos debían rellenarla con el trabajo previamente realizado y, a partir de ese momento, irla completando a medida que avanzaba el estudio del problema. Este dispositivo les permitió concretar por escrito el recorrido global del proceso de estudio y les ayudó a realizar con facilidad las últimas sesiones del taller.

4.3. Resultados de la evaluación

Se diseñó un examen[10] en el que se pedía llevar a cabo un pequeño recorrido de estudio a partir de un caso particular del mismo modelo. La primera pregunta hacía referencia a la construcción del modelo estudiado en el taller para el caso particular propuesto, la segunda trataba sobre la relación entre la variación de un parámetro y la gráfica de la función

[10] También accesible en www.wiris.com/mambo/.

beneficio. La tercera y cuarta preguntas hacían referencia, por fin, a la interpretación de nuevas relaciones previamente encontradas.

Respecto a los resultados y técnicas utilizadas por los alumnos, hay que diferenciar entre lo ocurrido en los grupos de Bachillerato y el de la ESO. Con respecto a la primera pregunta, un 85 % de los alumnos de Bachillerato muestran haber entendido el modelo con el que se les propone trabajar así como sus principales relaciones funcionales, la función ingresos, costes y beneficio. Los alumnos de la ESO obtuvieron peores resultados.

Uno de los objetivos de esta experimentación era dar sentido al cálculo de Bachillerato rompiendo con el prejuicio de que las gráficas son siempre el objetivo final del trabajo. En el taller de matemáticas proponíamos las gráficas como instrumentos para obtener información del sistema, no como finalidad en ella misma. El 100 % de los alumnos de Bachillerato usaron las gráficas para responder a la segunda cuestión. Por el contrario, los alumnos de la ESO tuvieron más dificultades para utilizarlas.

La mayoría de los alumnos identificaron que la variación de un parámetro repercute en algún tipo de movimiento sobre las gráficas, siendo capaces de describir de qué tipo de variación se trataba, aunque sus respuestas no tenían siempre la precisión deseada.

Un 80 % de los alumnos de Bachillerato supieron encontrar la relación entre diferentes parámetros como se les proponía en el último ejercicio, aunque casi ninguno fue capaz de llevar a cabo una interpretación de lo que suponía dicha relación y de utilizarla para responder a otros apartados.

En relación al dispositivo informático introducido, el *interface*, los comandos y las órdenes de la CSW fueron manipulados sin problemas por los alumnos de Bachillerato, y en pocas sesiones estos alumnos adquirieron un dominio satisfactorio de las técnicas que les ofrecía la CSW. No ocurrió lo mismo con los alumnos de ESO que tuvieron más dificultades para utilizar adecuadamente los comandos. Muchos alumnos esperaban que el ordenador les proporcionara la respuesta adecuada de inmediato apretando únicamente un botón. Fue difícil que los alumnos llevaran a cabo un trabajo de *interpretación*, *justificación* y *cuestionamiento* de las respuestas proporcionadas por la CSW. Sin embargo sí realizaron un verdadero trabajo de *exploración* (aunque en ocasiones se circunscribía a pruebas de ensayo y error) que normalmente les aproximaba a la respuesta final.

5. CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

(A) *La necesidad escolar de cambiar constantemente de actividad*

Una primera característica del taller experimentado es que, a lo largo de todo el proceso los alumnos tenían la sensación de que no se "avanzaba" en el trabajo y reclamaban cambiar de problema[11] a pesar de que no dominaban las técnicas que estaban en juego, no tenían una visión global del problema planteado ni, mucho menos, eran capaces de interpretar las relaciones funcionales entre las magnitudes que definían el sistema económico estudiado.

Este hecho, que podemos considerar como uno de los principales obstáculos con que nos hemos encontrado a la hora de desarrollar el taller diseñado, puede explicarse –al menos en parte– como una consecuencia de la manera de entender el "estudio de las matemáticas" en la institución de la enseñanza secundaria que es coherente con el carácter puntual, rígido y aislado de las OM que se estudian en dicha institución (Fonseca 2004). Dado que el taller

[11] En contra de lo que es habitual con los temas de matemáticas que se estudian en la escuela, el taller ocupó un "largo" periodo del curso (empezó el 11 de Abril y finalizó a principios del mes de Junio) y, además, a lo largo de todo el taller se estudiaron variaciones de una misma cuestión.

integra gran número de saberes a enseñar y que, además, lo hace de manera *funcional*, es claro que las sucesivas respuestas provisionales (que, cuando se consideran en sentido "fuerte", tienen estructura praxeológica) que van apareciendo a lo largo de su desarrollo deben poder integrarse en una OM al menos local y relativamente completa. No es, por lo tanto, extraño que el modelo epistemológico-didáctico dominante en la enseñanza secundaria constituya un importante obstáculo para la integración de un taller de matemáticas con Wiris.

(B) *Dirección del proceso de estudio y grado de autonomía de los estudiantes*

Otra de las características del taller experimentado, muy relacionada con la anterior, consistió en que la actividad de los alumnos acabó siendo *excesivamente guiada* por el material elaborado y, en consecuencia, por los profesores responsables de llevarlo a cabo. Con la intención de que sirviera de motor de la evolución del proceso, el diseño del taller proponía que las restricciones sobre los valores aceptables de los parámetros se introdujeran paulatinamente y no de una vez por todas. Dado que cada nueva restricción que introducía el profesor determinaba la cuestión que habría que tratar a continuación, resultó que esta forma de ir graduando las restricciones acabó guiando en gran medida el desarrollo del taller.

Surgen así cuestiones abiertas relativas a la *reestructuración del reparto de responsabilidades entre el profesor y los alumnos* que provoca el taller. ¿Cómo decidir (en la teoría didáctica y en la práctica escolar) el grado óptimo de autonomía y de responsabilidad matemática que hay que asignar a los alumnos en cada nivel educativo y, dualmente, el tipo de "dirección" que debe desempeñar el director del proceso de estudio? Dado que en cada institución escolar (por ejemplo en la enseñanza secundaria) se ha forjado históricamente un contrato didáctico institucional que evoluciona bastante lentamente, ¿cómo cambiar la distribución –implícita pero fuertemente arraigada– de las responsabilidades matemático-didácticas que otorga el contrato didáctico institucional para poner en marcha un taller como el experimentado?

(C) *¿Cómo hacer vivir en el paso de la ESO al Bachillerato cuestiones cuya respuesta requiere forzosamente una actividad de modelización algebraica?*

Uno de los objetivos del taller consistía en intentar modificar la ecología del sistema de enseñanza de las matemáticas para que *fuese posible llevar a cabo una verdadera actividad de modelización algebraica* entre la ESO y el Bachillerato. Para ello partíamos de una situación definida mediante unos datos fijos para poner progresivamente de manifiesto la necesidad de estudiar el modelo general que rige la situación económica presentada. En la práctica, la mayoría de los alumnos de cuarto de ESO no parece que fueran más allá de relacionar los diferentes casos particulares. Sólo algunos alumnos de Bachillerato trabajaron efectivamente con las relaciones funcionales entre las cuatro variables del sistema[12]. Resulta, en definitiva, que una de las principales dificultades para llevar a cabo una actividad matemática genuinamente "algebraica" (Bolea 2002) consiste en pasar de cuestiones puramente "numéricas" a cuestiones que involucran relaciones entre variables. En este punto surge una nueva cuestión abierta: ¿Qué técnicas didácticas deben ponerse en juego para *dar sentido a cuestiones que se plantean en términos de relaciones entre variables* y requieren una respuesta del mismo tipo?

(D) *El papel de la CSW para acceder al cuestionamiento e interpretación de las técnicas matemáticas*

La calculadora simbólica Wiris (CSW) fue utilizada en todo momento para hacer pruebas con rapidez y, por lo tanto, permitió que los alumnos llevasen a cabo efectivamente una *actividad*

[12] En futuras experimentaciones de este taller, a fin de poder incluir el caso de la función costes cuadrática, trabajaremos con alumnos de primero de Bachillerato exclusivamente (o, en su defecto, con alumnos de cuarto de ESO que sean futuros alumnos de Bachillerato).

exploratoria bastante rica. Pero, en general, no se logró que los alumnos *interpretaran espontáneamente los resultados* que obtenían. En este punto quedó muy claro que ésta no es una responsabilidad que el contrato didáctico institucional vigente en la enseñanza secundaria asigne a los alumnos. Sólo cuando el profesor insistía explícitamente en la necesidad de interpretar una gráfica o una expresión algebraica obtenida con la CSW, los alumnos intentaban realizar dicha tarea. ¿Cómo podría utilizarse la CSW a lo largo de un Taller para modificar progresivamente esta cláusula del contrato didáctico en la dirección de ampliar la responsabilidad matemática de los alumnos?

(E) *El carácter mágico e incuestionable de los resultados obtenidos con la CSW*

Los alumnos han mostrado una gran dificultad en combinar los dispositivos CSW y “lápiz y papel”. En algunos momentos parecían haber olvidado completamente las técnicas más elementales (como, por ejemplo, la resolución de una ecuación sencilla de primer grado) con “lápiz y papel” y se empeñaban en proponer las soluciones más disparatadas obtenidas erróneamente con la CSW. El fenómeno es similar al que aparece cuando los alumnos utilizan la calculadora numérica para calcular el producto de dos números de una cifra y tiene relación con la *interpretación cultural de la tecnología* que tiende a asignarle un carácter *mágico*[13]. Esta manera de interpretar los resultados obtenidos con la CSW ¿ha impedido la *emergencia de nuevas técnicas matemáticas*? Y, recíprocamente, ¿la integración de la CSW ha permitido plantear *cuestiones matemáticas* que anteriormente eran difícilmente planteables?

Tenemos, en resumen, una gran cantidad de cuestiones abiertas que, aunque han surgido de la experimentación de un Taller concreto, hacen referencia a problemas didácticos más generales. En primer lugar dichas cuestiones se refieren al problema de la *algebrización progresiva* de la matemática escolar (que debería iniciarse en el paso de la ESO al Bachillerato) y al papel potencial de la CSW en dicho proceso. Pero, más allá de ese problema, las cuestiones planteadas apuntan claramente hacia la necesidad de seguir indagando sobre la estructura y la dinámica de los procesos didácticos como el realizado en este taller y sobre las condiciones que harían posible su integración en los actuales sistemas de Enseñanza de las Matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bolea, P. (2002): *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*, Tesis doctoral publicada por el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza, en el número 29 de las Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano” (2003).

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004): Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14; 125-133.

Chevallard, Y. (1984): *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : l'évolution de la transposition didactique*, Petit X n°5, IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (1989): *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège, 2ème partie : Perspectives curriculaires : la notion de modélisation*, Petit X n°19, IREM de Grenoble.

[13] Umberto Eco adjudica a la consideración popular de la *tecnología* un carácter mágico, puesto que la tecnología oculta la cadena de las causas y los efectos y así, por ejemplo, el usuario vive la tecnología del ordenador como pura magia (*El mago y el científico*, EL PAIS, 15 de diciembre de 2002, pp. 13-15. [Resumen de la intervención del autor –titulada *La recepción de la ciencia por parte de la opinión pública y de los medios de comunicación*– en la Conferencia Científica Internacional, celebrada en Roma].

Fonseca, C. (2004): *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad*, Tesis Doctoral, Dto. de Matemática Aplicada, Universidad de Vigo.

García, F. J. (2005): *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*, Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

Sutherland, R., Bell, A., Rojano, T., Lins, R. (eds.) (2000): *Perspectives on school algebra*. Kluwer Academic Publisher.