LA DEMOSTRACIÓN EN LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

Lidia Ibarra,[1] *Graciela Méndez,*[2] *Mirta Velásquez*[3]

RÉSUMÉ
Ce travail se propose d'étudier le traitement de la démonstration mathématique dans les institutions scolaires à partir de l'analyse de:
a) Un questionnaire à des professeurs de l'enseignement primaire et secondaire.
b) Un échantillon de problèmes qui permettent d'utiliser les réponses des élèves comme indicateurs de certaines des caractéristiques des organisations mathématiques étudiées tout au long de la scolarité, en primaire, secondaire et premières années universitaires.
c) Livres de texte.
L'analyse met en relief l'absence de démonstrations mathématiques dans les pratiques mises en oeuvre dans la classe, ce qui renforce l'hypothèse du caractère essentiellement « monstratif » de la mathématique enseignée.

ABSTRACT
Our purpose is to study the treatment of the mathematical demonstration in school institutions starting from the analysis of:

a) A questionnaire to primary and secondary school teachers.
b) A sample of problems allowing us to use students' answers as indicators of certain characteristics of mathematical organizations studied throughout their schooling, in primary, secondary and tertiary education.
c) Textbooks

The analysis highlights the absence of mathematical proofs in school practices, which reinforces the hypothesis of the essentially "displayed" (only shown) character of taught mathematics.

El presente trabajo se focaliza en la argumentación lógica como actividad previa a la demostración. Este estudio forma parte de un proyecto que se viene desarrollando en los últimos años alrededor de la organización escolar del álgebra[4].

1. Acerca de la argumentación y demostración

Mostraremos como en los procesos de demostración matemática se pueden encontrar también procesos de argumentación, es más como estos últimos se vuelven necesarios a la hora de la demostración.

Balacheff describe el término *explicación* como idea primitiva de la cual deriva los términos de *prueba* y *demostración*.

> *La explicación es un discurso que pretende hacer inteligible el carácter de verdad, adquirido para el locutor, de una proposición o de un resultado* [...]. *Utilizaremos el término prueba para las explicaciones aceptadas por una comunidad dada en un momento dado* [...] (Balacheff, 1987)

El uso que hace Balacheff de explicación difiere del de Duval quién hace diferencia entre explicación y argumentación.

> *En la argumentación se trata de mostrar el carácter de verdad de una proposición, mientras que en la explicación los enunciados tienen una intención descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento* [...] (Duval, 1993)

[1] ibarra@unsa.edu.ar C.I.U.N.Sa. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta.
[2] mirtvela@unsa.edu.ar C.I.U.N.Sa. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta.
[3] nildagramendez@yahoo.com.ar C.I.U.N.Sa. Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de Salta.
[4] Proyecto CIUNSa Nº 889 y 1171

Balacheff y Duval usan el término demostración con significados similares: una secuencia de enunciados organizados según reglas determinadas. Para Duval el objeto de la demostración es la verdad y obedece a criterios de validez, mientras que la argumentación se propone lograr la convicción de otra persona o de sí mismo, obedeciendo a criterios de pertinencia.

Arsac define "la demostración es un medio de prueba, es una técnica". La demostración está orgánicamente relacionada con las matemáticas y aparece de manera natural en el curso de su desarrollo.

En el presente trabajo utilizamos los términos demostración y argumentación para referirnos de modo genérico al objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas aceptado en el seno de la comunidad matemática ante situaciones de validación. En ella aparecen nociones y técnicas matemáticas, es decir, maneras de hacer que se justifican en un marco teórico determinado. A manera de ejemplo podemos mencionar la demostración a partir de "definiciones", y "nociones comunes", que realizó Euclides del teorema de Pitágoras. Tanto las "definiciones" como las "nociones comunes" son resultados previamente establecidos.

A nuestro juicio en la búsqueda de demostrar el enunciado, la estructura de la argumentación describe relaciones formales de coherencia. La situación argumentativa responde a la necesidad de explicar el teorema.

Según Gorski *et al* (1992):

> *Los principios en que se apoyan la demostración y de los que se sigue con carácter necesario la veracidad de la tesis que se demuestra, se denominan fundamentos o argumentos de una demostración.*

El objeto "demostración" podemos describirlo como emergente del sistema de prácticas argumentativas formales. En consecuencia los axiomas o postulados de cualquier sistema matemático se hacen necesariamente mediante argumentaciones deductivas.

Habiendo analizado las diferentes conceptualizaciones acerca de la argumentación y demostración, resulta pertinente indagar sobre éstas, en diferentes actividades:

- Encuesta a docentes.
- Análisis macro de la actividad matemática.
- Análisis micro de la actividad matemática.
- Análisis de los libros de texto.

2. Análisis de la actividad matemática escolar

A partir del análisis de la actividad matemática escolar es posible describir algunos fenómenos didácticos tales como: "*Existen limitaciones en la utilización simbólica al realizar justificaciones matemáticas por los estudiantes de 11 a 15 años de edad*". Postulamos que este fenómeno es consecuencia del carácter mostrativo de la matemática de la escuela secundaria.

Esta última afirmación surge de los siguientes estudios.

2.1 Análisis de muestra realizadas a profesores de escuelas de Salta, capital

La muestra fue tomada entre todos los profesores de las escuelas privadas y públicas de la ciudad de Salta, capital. Para definir el tamaño de la muestra se tomó como referencia los datos facilitados por la Dirección General de Polimodal y por la Dirección Central de Educación Privada.

Estimaremos estadísticamente[5] la proporción de docentes que usan el libro de texto como recurso didáctico con un nivel de confianza del 5 %. La muestra está formada por 14 escuelas privadas (es decir un 40 % del total de las escuelas privadas) y 36 escuelas públicas (es decir un 43 % del total de las escuelas públicas).

Los resultados de la muestra fueron tomados entre los meses de mayo y julio del 2003, a profesores de escuelas privadas de Salta, capital. Resultaron ser similares los datos obtenidos en las escuelas privadas y públicas, esto puede apreciarse a partir de las respuestas de la prueba piloto. Por este motivo, en adelante no realizaremos distinciones entre educación pública y privada.

De las respuestas obtenidas deducimos lo siguiente:

Análisis macro de la actividad matemática institucional

Debido a la segmentación de los establecimientos de EGB3: el 7º quedó en las antiguas escuelas primarias, y el 8º y 9º en las antiguas escuelas secundarias. Esta segmentación de la EGB3, produce una desarticulación entre niveles y ciclos.

Cabe observar que un mayor porcentaje de instituciones tienen una orientación Humanística o Administrativa Contable sobre otras orientaciones.

Las bibliotecas cuentan con más de 5 libros de matemáticas para cada nivel de enseñanza, editados entre los años 1960 y 2000. El porcentaje de libros de Polimodal en las bibliotecas de las instituciones analizadas es muy bajo.

La proporción de libros de los tres cursos (7º, 8º y 9º del EGB3) no es la misma para todas las editoriales. Estableciendo el siguiente orden de mayor a menor volumen de libros editados: Estrada, Kalepuz, Santillana y Aique.

Análisis micro de la actividad matemática institucional

Sobre las planificaciones:

Los profesores utilizan libros de textos para organizar sus actividades en el aula, los hemos clasificado según la Editorial más utilizada: Santillana, Kalepuz y Aique

Ni los profesores ni las disposiciones ministeriales exigen que sean utilizados los libros de textos. Como consecuencia los profesores acaban organizan las actividades matemáticas con apuntes y guías de trabajos prácticos extraídos de los libros de textos. Estos se pueden agrupar en dos categorías:

- Apuntes con definiciones y demostraciones
- Apuntes sin definiciones ni demostraciones.

Se llevo a cabo un estudio estadístico con las hipótesis siguientes:

H_0 = el % de profesores que hacen apuntes es igual al % de profesores que no hacen.

H_1= el % de profesores que hacen apuntes es mayor que el % de profesores que no hacen.

[5] Para el análisis estadístico de las respuestas se usaron: la prueba binomial y la prueba χ^2.

Con un 5 % de nivel de confianza, se valida la hipótesis H_1, es decir, que el porcentaje de profesores que hacen apuntes (extraídos de los libros de textos) es mayor que el de los profesores que no lo hacen.

Todos estos indicadores serán utilizados cuando analicemos los libros de textos.

2.2 Análisis del cuestionario realizado a estudiantes de Polimodal y de primer año de la carrera del Profesorado de Matemáticas

En el marco del análisis previo, hemos realizado una encuesta cuyo objetivo es utilizar las respuestas de los estudiantes para identificar algunas de las características de las organizaciones matemáticas que se estudian en la EGB3 y Polimodal.

La estadística se llevo a cabo a un grupo de 100 estudiantes que cursan el 2º Polimodal y 10 estudiantes universitarios que cursan el primer año.

La muestra de los alumnos de Polimodal se realizó en tres instituciones donde ya se había realizado la encuesta a los profesores. Estas fueron elegidas teniendo en cuenta que:

- En las tres instituciones los profesores elaboran apuntes con definiciones y demostraciones.
- El teorema de Pitágoras aparece en el 7º, 8º y 9º del EGB 3 y 1º del Polimodal en diferentes marcos: aritméticos, geométricos y trigonométricos.

La misma prueba fue realizada a 10 alumnos del primer año de la carrera del Profesorado de Matemáticas, provenientes de las instituciones citadas en el párrafo anterior, según los datos del Departamento de Estadística que depende de la Secretaría Académica de la Universidad Nacional de Salta.

El grupo dispuso de 40 minutos para trabajar con las siguientes tareas:

(i) Demostrar que la suma de dos números pares es otro número par.

(ii) Demostrar el Teorema de Pitágoras.

Análisis comparativo de las respuestas obtenidas

(i) Demostrar que la suma de dos números pares es otro número par.

Alumnos del Polimodal

40% No responde (20% transcriben el enunciado y 20 % no hacen nada).

55,5% Demuestran la proposición utilizando ejemplos numéricos.

5,5% Afirman que un número par es de la forma $2x$ o $2y$.

Alumnos universitarios

15% No responde.

25% Identifican la hipótesis y la tesis.

40% Demuestran utilizando ejemplos numéricos.

10% Demuestran primero con ejemplos y luego generalizando.

10% Parten que el número par es de la forma $y = 2x$, dan valores y afirman que es un número par.

(ii) Demostrar el teorema de Pitágoras.

Alumnos de Polimodal

40% No responde.

40% Dibujan un triángulo rectángulo asignando a la hipotenusa la letra c y los otro catetos a y b respectivamente. Asignan valores y comprueban que $a^2 + b^2 = c^2$.

20% Ídem al anterior asignando la letra h a la hipotenusa. Comprueban que $h^2 = a^2 + b^2$.

Alumnos universitarios.

20% No responde.

40% Dibujan un triángulo rectángulo asignando a la hipotenusa la letra c y los otros catetos a y b respectivamente. Asignan valores y comprueban que $a^2 + b^2 = c^2$.

20% Ídem al anterior en cuanto a la simbolización y demuestran utilizando las relaciones trigonométricas.

20% Ídem al anterior en cuanto a la simbolización y demuestra a partir del teorema del coseno.

Del análisis de los porcentajes obtenidos se observa que:

- La mayoría de los estudiantes tanto alumnos de Polimodal como universitarios tienen una concepción errónea acerca de la demostración, puesto que proponen ejemplos numéricos.
- La mayoría de los estudiantes que habían escrito simbólicamente el teorema lo hacían con una nomenclatura común a pesar de ser estudiantes procedentes de distintos colegios. Lo cual pone en evidencia unos de los aspectos de la rigidez de las organizaciones matemáticas que se construyen en el nivel medio, existe una clara dependencia de la nomenclatura asociada a la técnica.
- No hay demostración, por lo que la organización matemática no se presenta completa por el escaso desarrollo del bloque tecnológico-teórico.

2.3 Análisis de los libros de textos

La selección de los libros de textos se realizó de acuerdo a los datos recogidos en la muestra y siguiendo los siguientes criterios:

1) Organización de la información a partir del siguiente corte temporal: antes de la Reforma Educativa (1960-1990) y después de la Reforma Educativa (a partir de 1992).
2) El corte temporal se realiza teniendo en cuenta la importancia de los cambios propuestos, al menos discursivamente, a partir de la vigencia de la Ley Federal de Educación.
3) La fecha de 1960 como inicio de la investigación se toma teniendo en cuenta la disponibilidad de los primeros libros de textos dedicados a la enseñanza de las

Matemáticas con lo que cuentan las bibliotecas de establecimientos secundarios (públicos y privados) en la capital de la provincia de Salta[6].

Metodología utilizada para el análisis de los libros de textos

Revisión y ampliación de los trabajos realizados en años anteriores con otra metodología de análisis a libros de textos de la década de los noventa. En la nueva metodología utilizada se hace necesaria la construcción de una organización matemática de referencia, que tal como su nombre indica, esta nos servirá de referente para analizar las organizaciones matemáticas existentes en los libros de textos.

Describiremos la metodología para el análisis de los libros de textos, para ello utilizaremos como ejemplo el caso concreto de las ecuaciones lineales y los sistemas de ecuaciones.

La actividad matemática alrededor de las ecuaciones lineales y los sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Los datos obtenidos de los diferentes libros fueron organizados de la siguiente forma:

Libro	Tema	Temas no justificados	Justificaciones y tipos de justificaciones	Análisis de los indicadores	Desintegración entre teoría, técnica y tecnología

Partimos de la hipótesis:

H$_1$: “La actividad matemática escolar tal como se lleva a cabo en la enseñanza, muestra una desintegración entre técnica, tecnología y teoría.”

Consideramos que la parte práctica de la actividad matemática presenta dos elementos inseparables: las tareas problemáticas que se agrupan en tipos de problemas y las técnicas útiles para llevara cabo dichas tareas. Otra dimensión de la actividad matemática inseparable a la citada queda descrita por la tecnología y la teoría, dando justificación e interpretación a la práctica matemática.

De todos los libros analizados antes y después de la reforma podemos deducir las siguientes conclusiones:

- No hay indicios de integración de la actividad matemática. Los problemas son aislados y no aparece ningún tipo de elemento justificativo e interpretativo, que podría establecer interrelaciones entre los diversos problemas.

  En algunos libros de textos se proponen diversas actividades (olimpiadas, integramos, juegos) pero estas se presentan totalmente aisladas.

- En cuanto a la técnica de resolución de ecuaciones:

  a) Hay un predominio de la técnica de “deshacer”; “aplicar propiedades numéricas” y “la de la balanza”. Estas técnicas consolidan la concepción de ecuación como igualdad numérica.

  b) No hay justificación para la utilización de las técnicas mencionadas.

[6] Datos extraídos de las muestra y de la información suministrada por los alumnos de la cátedra Práctica Docente que la carrera del Profesorado de Matemáticas que realizan sus prácticas en diferentes instituciones de la ciudad de Salta, capital.

c) La mayoría de los autores proponen problemas numéricos donde las letras juegan únicamente el papel de incógnitas, los parámetros están ausentes.

d) Todas las propuestas de los autores tienen una única solución, esto no permite plantear preguntas sobre las condiciones de existencia de las posibles soluciones. Provocando graves dificultades para avanzar con las ecuaciones con más de dos incógnitas, así como con los sistemas de ecuaciones.

En los libros de la década del 90, después de la Reforma, el análisis realizado permite deducir que se acentuaron las siguientes características:

a) Escasa ejercitación a pesar de la diversidad de actividades que proponen de diferentes nombres (olimpiadas matemáticas, integramos, etc), limita el momento exploratorio de la actividad matemática, lo que no permite una profundización de las técnicas utilizadas para que se pueda llegar a un nivel tecnológico.

b) No se plantea un problema que requiera usar una técnica distinta a las utilizadas; Lo que indica un momento exploratorio débil, en consecuencia el momento de la técnica es nulo.

Por todo lo expuesto surge un nuevo problema derivado de la generalización de la aritmética, que nos llevó a la formulación de la siguiente hipótesis:

H_2: "La ausencia de justificaciones y demostraciones matemáticas en los libros de textos utilizados en las actividades matemáticas desarrolladas en el aula tiene un carácter puramente mostrativo de dicha actividad."

La actividad matemática alrededor de las ecuaciones cuadráticas y las funciones cuadráticas.

En esta etapa se modifica la metodología utilizada para analizar la actividad matemática alrededor de las ecuaciones lineales y de los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Hemos utilizado una OM de referencia para interpretar la OM a enseñar propuesta por los libros. Para llevar a cabo este análisis, designaremos: las técnicas matemáticas con $\boldsymbol{t_i}$; las tecnologías con $\boldsymbol{T_i}$ las teorías con $\boldsymbol{Teor_i}$; las demostraciones con $\boldsymbol{d_i}$ y finalmente los tipos de problemas con $\boldsymbol{p_i}$.

Los datos obtenidos de los diferentes libros fueron organizados de la siguiente forma:

Tema	Tipos de Problemas	Técnicas	Tecnología	Teorías	Momento Didáctico

La OM de referencia se engloba y se integra en una OM Regional. Trabajaremos con dos OM locales.

OM1: organización entorno a la ecuación cuadrática. En esta aparece la definición de ecuación de segundo grado con una variable ($\boldsymbol{Teor_1}$). Así como la definición de "raíces" o "ceros" de la ecuación ($\boldsymbol{Teor_2}$). Y la resolución de ecuaciones cuadráticas incompletas a través de la técnica de transposición de términos $\boldsymbol{(t_1, T_1, Teor_1)}$ entre otras.

OM2: organización entorno a la función cuadrática. En esta aparece la definición de función cuadrática ($\boldsymbol{Teor_4}$). Representación gráfica de la parábola

$(t_6, t_5, T_6, T_5, Teor_4)$. Parábola como lugar geométrico $(t_{11}, t_{12}, d_7, Teor_4)$ entre otras.

En OM1 los métodos para hallar las raíces de una ecuación cuadrática forman parte del discurso tecnológico, y en OM2 son tareas matemáticas constitutivas. Se puede decir que OM1 está parcialmente contenida en OM2. Las dos OM comparten la teoría de los números reales como cuerpo y la de polinomios reales, incluidas en la de funciones reales, por tanto podemos decir que OM1 y OM2 se incluyen en una OM regional.

Descripción de la OM a enseñar

Para organizar la información recogida del libro construimos una tabla cuya primera columna indica el tema tratado. La segunda columna el tipo de problema propuesto para ese tema. En la tercera columna se indica el tipo de técnica matemática que se propone utilizar para la resolución de los problemas. En la cuarta columna se indica la tecnología de las técnicas a la que el texto hace referencia. En la quinta columna se indica, si es que aparecen en el texto, las Teorías correspondientes a las tecnologías. Por último en la sexta columna se hace referencia al momento didáctico que propicia el tratamiento de los temas según las actividades planteadas en el texto.

Del análisis de la tabla se desprenden:

Las justificaciones tecnológicas–teóricas son casi nulas en el texto, de la OM1 sólo aparecen las demostraciones d_1 (deducción de la fórmula de resolución de la ecuación cuadrática), d_2 (propiedad de la suma de las raíces de la ecuación cuadrática) y d_3 (propiedad del producto de las raíces de la ecuación cuadrática), que son realizadas como justificaciones y no se presentan al alumno como un tipo de tarea que deba resolver. En OM2 no se presentan demostraciones teóricas ni ejercicios de generalización como tareas para los alumnos, sólo aparecen definiciones o enunciados relevantes como propiedades.

Todas las actividades propuestas en los libro tienden a la aplicación mecánica de las fórmulas, siendo muy débiles los elementos tecnológicos (definiciones, justificaciones, demostraciones, argumentaciones) que aparecen de forma secundaria.

No hay una buena articulación entre la OM1 y OM2 en el texto, por ejemplo, para calcular el vértice de la parábola no se hace uso de la semisuma de las raíces de la ecuación cuadrática estudiada en OM1.

Los problemas y aplicaciones presentados son muy limitados, en general son del tipo numérico y geométrico-algebraico. No se hace referencia a problemas del tipo p_1 (vida cotidiana), p_2 (edades), p_5 (físico), p_7 (gráfico).

No se presenta un grado de dificultad con el que se muestre la necesidad de buscar otras maneras de hacer o técnicas para la resolución de los problemas elegidos.

Debido a la escasez de la tecnología correspondiente a la práctica matemática, hay una ausencia total de actividades que inciten a razonar, demostrar y justificar las acciones así como de las técnicas utilizadas por los alumnos. Como consecuencia de ello, es casi imposible llegar a una profundización de las técnicas y a una generación de problemas nuevos.

No se relacionan las distintas técnicas utilizadas, por ejemplo, para el cálculo de las coordenadas del vértice de la parábola. Tampoco se insiste en el paso de una forma de ecuación de la parábola a otra, de la ecuación normal a la general y viceversa.

También se observa una ausencia de actividades que lleven al alumno al uso de simbología adquiriendo suficiente habilidad matemática dentro de un marco de rigor pertinente.

Se estudian las dos OM anteriores de manera desvinculada, de forma atomizada, sin encuadrarlas dentro de una misma teoría matemática.

Conclusiones

Las actividades propuestas por los docentes están centradas en la aplicación de definiciones o conceptos, siendo escasas o nulas las actividades que tienden a plantear hipótesis, hacer conjeturas y posibles demostraciones sin exigencia de formalización extrema.

Como consecuencia de lo anteriormente expresado, al analizar las posibles demostraciones propuestas a los alumnos, resultó que estos no fueron capaces ni de argumentar ni de expresar formalmente la demostración pedida, aún cuando la misma había sido trabajada en diferentes niveles de escolaridad.

Podemos afirmar que se produce un abandono de la demostración formal o rigurosa en los textos posteriores a la Reforma, en donde ya no se realizan demostraciones aunque sí se diferencia claramente entre hipótesis, tesis y demostración.

Tampoco existe, en los libros anteriores a la Reforma, un camino previo de argumentación lógica que prepare al alumno para realizar demostraciones formales al finalizar el Polimodal.

Consideramos además, que se han eliminado drásticamente las actividades de demostración matemáticas, sobreviviendo sólo la realización de demostraciones-argumentaciones sencillas con autonomía del alumno. Las actividades de los libros de textos se limitan a casos particulares, no tienden a la generalización de conceptos ni a la argumentación o demostración. Tampoco se desarrollan actividades vinculadas a la construcción de significados en relación a proposiciones lógicas, el uso de los conectivos lógicos, el contraejemplo como método para demostrar la falsedad de un enunciado…

En los documentos que rigen la enseñanza de las matemáticas en EGB3, si bien se considera la demostración, la argumentación y otras actividades relacionadas a ellas, no existe una secuenciación o sistematización, lo que provoca que ningún alumno logre un buen desarrollo en actividades vinculadas a la demostración.

El docente no puede asumir la total responsabilidad de la importancia y tratamiento que se le asigna a la argumentación y demostración en las aulas, y mucho menos a lo largo del trayecto educativo que cursa cada alumno, es decir que la responsabilidad debe ser asumida también por las instituciones.

Bibliografía

BALACHEFF, N.(1987): Processus de preuve et situations de validation. *Eduactional Studies in Mathematics,* 18, 147-176.

BUSTAMANTE, P., PÉREZ, M. *et al*: Argumentar en la escuela. CIUNSA. Ed. Hanne. Salta, Argentina.

BOLEA, P., BOSCH, M., GASCON, J.(2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 20 (1), 7 – 40

BOSCH, M., ESPINOZA, L., GASCÓN, J.(2.003): El profesor como director de procesos de estudio: análisis de organizaciones didácticas espontáneas. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Vol 23, nº1, 79-136.

DIEUDONNE, J.(1987): En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy. Alianza Universidad. Madrid.

DUVAL, R.(1993): Argumenter, demontrer, expliquer: continuitéou rupture cognitive?. *Petit x*, 31, 37 –61.

GUELMAN, N. *et al* (1998): El Libro de Matemática 7, 8. Ed. Estrada. Argentina

GODINO, J., RECIO, A.(2001): Significados Institucionales de la demostración implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias.* 19(3), 405–414.

GORSKI D, P., TRAVANT, P. V., *et al*.(1992): *Lógica*, Grijalbo, México.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M., GASCON, J.(1997): Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona: ICE/ Horsoi.

IBARRA, L., PÉREZ, M. *et al*.(2001): La argumentación en la actividad matemática Noticiero Anual - ISSN- 154 – 9560, 300. Editor: Unión Matemática Argentina. CONICET.

LATORRE, M., ANDRES, M. y MACHIUNAS, M.(2000): Matemática 7.EGB.Ed. Santillana.

POLYA, G.(1944): Cómo plantear y resolver. México: Trillas.

TIRAO, A.(1985): Matemática 1. Ed. Kapelusz. Argentina.