El momento del trabajo de la técnica en la completación de organizaciones matemáticas: el caso de la "regla de Ruffini"

Cecilio Fonseca,[1] Marianna Bosch,[2] Josep Gascón[3]

RÉSUMÉ

Dans notre travail de thèse (Fonseca 2004) nous apportons des résultats qui prouvent que les organisations mathématiques étudiées dans l'enseignement secondaire espagnol sont *ponctuelles, rigides* et *peu articulées entre elles.* Nous avons postulé que cette « rigidité » est en rapport avec *l'incomplétude* des organisations mathématiques locales, liée sans doute à l'absence ou au sous-développement de certains moments didactiques dans les processus d'étude de cette institution didactique. Il s'ensuit le besoin de mettre en place des dispositifs didactiques au Secondaire qui permettent d'intégrer les organisations mathématiques ponctuelles en des organisations mathématiques locales relativement complètes. Nous présentons ici un exemple de la capacité d'articulation d'organisations mathématique que fournit le développement du travail de la technique à partir de la considération d'un cas particulier : la *Règle de Ruffini* dans le thème des *équations polynômiales à coefficient entiers*.

ABSTRACT

In his doctoral work, Fonseca (2004) highlighted some results to show that mathematical organisations currently studied at Spanish secondary school are *specific, rigid* and *weekly connected to each other.* We postulated that this rigidity is linked to the incompleteness of local mathematical organisations which must in turn be related to the absence – or the underdevelopment – of some didactic moments during the didactic processes. In consequence, there is a need to design and implement didactic devices at secondary schools in order to facilitate the integration of punctual mathematical organisations into relatively complete local ones. Here we present an example of the "linking capacity" of the development of the technical work, illustrated by the case of Ruffini's rule in the topic of polynomial equations.

1. Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la Secundaria y la Universidad

En nuestro trabajo de tesis doctoral (Fonseca 2004; Bosch, Fonseca, Gascón 2004) hemos mostrado en qué sentido las organizaciones matemáticas (en adelante OM) que se estudian en Secundaria son *puntuales*, *rígidas* y *poco articuladas* entre sí. Hemos postulado que esta rigidez está relacionada con la *incompletitud* de las OM *locales* que viven en la enseñanza secundaria y hemos considerado que dicha incompletitud está en la base de muchas de las *discontinuidades* entre las matemáticas de la enseñanza secundaria y las matemáticas de la enseñanza universitaria.

La noción de "*completitud relativa*" de una OM local puede precisarse en términos de los componentes de esta organización. En una primera aproximación, podríamos decir que una OM será tanto más completa cuantos "más elementos" (técnicos y tecnológico-teóricos) contenga y cuanto "más ricos" sean estos elementos. Para concretar esta idea propusimos una serie de *indicadores* que, en cierto sentido, permiten "medir" el grado de completitud de la OM considerada (Bosch, Fonseca, Gascón 2004, pp. 12-15):

1. *Integración de los tipos de tareas y existencia de cuestionamiento tecnológico*
2. *Diferentes técnicas para cada tipo de tareas y criterios para elegir entre ellas*
3. *Independencia de los objetos ostensivos que sirven para representar las técnicas*
4. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas"*
5. *Interpretación del funcionamiento y del resultado de aplicar las técnicas*
6. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas"*
7. *Integración de los elementos tecnológicos e incidencia sobre la práctica*

[1] Universidad de Vigo, Departamento de Matemática Aplicada. cfonseca@uvigo.es.
[2] Universitat Ramon Llull, FundEmi IQS. mbosch@fundemi.com.
[3] Universitat Autònoma de Barcelona, Departamento de Matemáticas. gascon@mat.uab.es.

Si estos indicadores se refieren a la OM local como producto acabado, resultado de un proceso didáctico a través del cual ésta se ha (re)construido, también aparecieron de forma dual las características que debe cumplir un proceso didáctico para que dé lugar a una OM relativamente completa. Estas características surgen de la consideración de los *momentos didácticos* como dimensiones del proceso de estudio (Chevallard 1999), relacionando así la completitud de una OM con el modo de realización de los distintos momentos. Puede entonces considerarse que el grado de completitud de una OM local depende de la medida en que, a lo largo de su proceso de construcción, se cumplan las siguientes condiciones:

1. Debe haber un *primer encuentro* con un tipo de tareas matemáticas T_q asociado a una cuestión matemática q "con sentido", esto es, que provenga de los niveles superiores de determinación didáctica y que conduzca a alguna parte (que no sea una cuestión "muerta").

2. El proceso de reconstrucción de una OM local debe contener momentos *exploratorios* en los que la comunidad de estudio tenga la oportunidad de construir y empezar a utilizar una técnica inicial τ_0 potencialmente útil para realizar las tareas del tipo T_q. Dicha exploración debe permitir comparar las *variaciones* de τ_0 que aparecen al abordar las diferentes tareas del tipo T_q.

3. La exploración debe desembocar en un verdadero *trabajo de la técnica* que se inicia rutinizando τ_0 hasta provocar un *desarrollo progresivo de dicha técnica*. Este desarrollo debe generar técnicas relativamente nuevas para la comunidad de estudio: τ_1, τ_2, τ_3, ... El trabajo de la técnica debe proseguir hasta que los estudiantes alcancen un dominio robusto del conjunto de las técnicas, lo que provocará la ampliación progresiva de T_q y la *aparición de nuevos tipos de tareas* T_1, T_2, T_3, etc.

4. Durante el proceso de reconstrucción deben aparecer *nuevas cuestiones matemáticas* relativas a las técnicas τ_i, esto es, cuestiones relativas a la interpretación, la justificación, y el alcance de las técnicas, así como a las relaciones que se establecen entre ellas. La respuesta a estas cuestiones requerirá la realización de nuevas tareas matemáticas que también pasarán a integrarse en la OM en construcción.

5. En el proceso de reconstrucción es necesario *institucionalizar* aquellos elementos que deben ser considerados como integrantes de la OM para distinguirlos de los que han hecho, a lo largo del proceso, el papel de meros instrumentos auxiliares de la construcción. Pero *esta institucionalización* no debe referirse únicamente a elementos praxeológicos aislados; la institucionalización de cualquier componente de la OM *debe hacer referencia* (más o menos explícita) *a la* OM *en su conjunto*, por lo que podríamos decir que el sujeto de la institucionalización es siempre, al menos virtualmente, una OM local.

6. Ligada a la institucionalización también *es preciso evaluar la calidad de los componentes de* OM *construida*: los tipos de tareas (¿están bien identificados?, ¿existen especimenes suficientemente variados de cada tipo?, ¿a qué cuestiones están asociados?, ¿están relacionados con el resto de la actividad de los estudiantes o bien están aislados?); las técnicas (¿están suficientemente trabajadas?, ¿son fiables?, ¿son económicas?, ¿son las más pertinentes para realizar las tareas presentadas?); y el discurso tecnológico (¿está bien fundamentado?, ¿es suficientemente explícito?, ¿ayuda efectivamente a interpretar y justificar las técnicas?, ¿permite variar las técnicas en la dirección adecuada para construir nuevas técnicas?).

Presentamos en este trabajo una de las dimensiones que caracteriza a una OM local relativamente completa, la referida al *Momento del Trabajo de la Técnica.* Nuestro propósito es mostrar, mediante la consideración de un caso muy particular de OM (la "regla de Ruffini" para la factorización de polinomios), de qué manera se puede retomar un ingrediente técnico que los alumnos han aprendido a utilizar de manera muy rígida y limitada para, mediante un adecuado trabajo de la técnica, poder generar nuevas técnicas, nuevas justificaciones y explicaciones y nuevas cuestiones, de modo que se vaya ampliando la OM puntual de partida.

Muchas de las organizaciones matemáticas locales que se consideran disponibles en la enseñanza universitaria se suponen previamente construidas en la enseñanza secundaria con un grado suficiente de completitud y por ello no se ve la necesidad de reconstruirlas efectivamente en la universidad. En general se da la situación siguiente: cuando en un proceso didáctico se *recupera una técnica* aprendida anteriormente para utilizarla en una actividad matemática nueva (como, por ejemplo, para utilizarla como subtécnica de una nueva técnica), se suele recuperar una versión rígida y estereotipada de la técnica "antigua" a pesar de que, presuntamente, ésta ya no es problemática para los estudiantes. Esto sucede tanto si se trata de la recuperación de una técnica que forma parte del mismo tema, como si trata de la recuperación de una técnica que se aprendió en temas anteriores del mismo curso o, incluso, en cursos anteriores. De este modo, los alumnos nunca se ven llevados a desarrollar y flexibilizar las técnicas: o son problemáticas, o se utilizan de manera rígida y estereotipada.

Postulamos que este fenómeno se acentúa cuando la recuperación se hace en una institución diferente a la institución en la que el estudiante utilizó una técnica por primera vez como, por ejemplo, cuando en la enseñanza universitaria se recupera una técnica matemática que los estudiantes aprendieron en Secundaria. Además, en este último caso, no sólo es cierto que en la enseñanza universitaria se utilizan rígidamente muchas de las técnicas que se recuperan de la enseñanza secundaria sino que, y éste es el punto que nos interesa resaltar aquí, aunque se disponga (o se pueda disponer) en la enseñanza universitaria de los elementos tecnológicos necesarios para flexibilizar el uso de una técnica introducida en la enseñanza secundaria, éstos no siempre se utilizan efectivamente para desarrollar la técnica en cuestión, esto es, para ampliar su dominio de validez, articularla con otras técnicas y hacerla más económica y más fiable.

Lo anterior sugiere que la explicación de algunas de las discontinuidades entre la Secundaria y la Universidad habría que buscarla no sólo en la rigidez de las organizaciones matemáticas que viven en la enseñanza secundaria (Fonseca 2004), sino también en la *ausencia de una actividad matemática universitaria que retome las organizaciones matemáticas que se estudian en Secundaria, las desarrolle adecuadamente, las articule entre sí y las integre en otras organizaciones más amplias y completas.* Ejemplificaremos aquí una posible vía de desarrollo de este tipo de actividad matemática en el caso de la regla de Ruffini, un algoritmo muy utilizado en la enseñanza secundaria española para efectuar la división de un polinomio con coeficientes enteros por un monomio del tipo $x – a$. Veremos además qué papel juega el trabajo de la técnica en este proceso de producción praxeológica.

2. La Regla de Ruffini en la enseñanza secundaria española

La regla de Ruffini es un algoritmo de división de polinomios que se enseña clásicamente en la Secundaria española y que constituye, en esta institución, un ingrediente esencial de las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas.

La movilización de esta regla permite realizar de forma "taquigráfica" la división de un polinomio con coeficientes enteros por un monomio del tipo $x – a$. Por ejemplo, para dividir $x^3 – 4x^2 + x + 6$ entre $x – 2$ se procede de la siguiente manera:

> En primer lugar se escriben los coeficientes ordenados del polinomio y el valor de la posible raíz (aquí 2):

	1	-4	1	6
2				

Posteriormente se “baja” el primer coeficiente (escribiéndolo en la línea de abajo), se multiplica este coeficiente por la raíz y se suma a este producto el segundo coeficiente, escribiendo el resultado de la suma debajo. Se repite el proceso con los demás coeficientes hasta llegar a un valor final que debe ser 0 si la raíz elegida es efectivamente una raíz del polinomio. Se obtiene así:

	1	-4	1	6
2		2	-4	-6
	1	-2	-3	0

Los valores obtenidos son los coeficientes del polinomio resultado de dividir $x^3 - 4x^2 + x + 6$ entre $x - 2$ ordenados de mayor a menor grado, teniendo en cuenta que este polinomio tiene un grado menos que el inicial (si el inicial es de grado 3, éste será de grado 2): $x^2 - 2x - 3$.

En el caso de haber realizado la operación con un entero que no fuera raíz del polinomio, se encontraría un último coeficiente distinto de 0, como por ejemplo:

	1	-4	1	6
5		5	5	30
	1	1	6	36

Tal como se utiliza la técnica en la enseñanza secundaria española, se concluiría en el primer caso que 2 es raíz de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ y que $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x - 2)(x^2 - 2x - 3)$, mientras que en el segundo caso sólo se concluiría que 5 no es raíz de $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Generalmente, la regla de Ruffini se utiliza junto con el principio tecnológico que afirma que si un polinomio de coeficientes enteros tiene una raíz entera, entonces ésta divide el término independiente del polinomio. En el caso anterior, ya no se habría probado si 5 es o no raíz del polinomio porque 5 no divide al término independiente 6. Pero sí se tendrían que probar los otros divisores de 6: los valores 1, 3, -1, -2 y -3. Así, dado un polinomio entero, se buscan los divisores del término independiente y se determina, mediante la regla de Ruffini, si estos valores son o no una raíz, obteniendo directamente en caso afirmativo (resto 0) el resultado de la división.

El uso iterado y sistemático de esta regla para la resolución de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros genera en los alumnos un principio tecnológico “folclórico” y muy robusto según el cuál todas las ecuaciones polinómicas de grado mayor que 2 con coeficientes enteros, o tienen alguna raíz entera y ésta se puede calcular “por Ruffini” o no tienen ninguna raíz. Generalmente no se plantea a los alumnos la necesidad de recurrir a otro tipo de técnicas para resolver ecuaciones, ni siquiera cuando los alumnos ya disponen de los instrumentos del cálculo diferencial y la representación gráfica de funciones. Además, en los pocos casos en los que se utilizan las gráficas de funciones para resolver ecuaciones, éstas no aparecen como una técnica que permite superar las limitaciones de la regla de Ruffini.

Es fácil pues poner en evidencia la incompletitud de la OM que se enseña en Secundaria en torno a la resolución de ecuaciones polinómicas (Fonseca 2004), incompletitud debida esencialmente a la ausencia de una cuestión inicial suficientemente “viva” que conlleve un estudio de las limitaciones de la regla de Ruffini y a la necesidad de desarrollarla con nuevos ingredientes técnicos y tecnológico-teóricos. De hecho, podríamos decir que, en Secundaria, el problema que se plantea no es hallar las soluciones de una ecuación polinómica, sino calcular sus soluciones enteras *con el supuesto previo de que éstas existen*.[4]

[4] Hay pequeñas excepciones, como el estudio de las ecuaciones bicuadradas (del tipo $ax^4 + bx^2 + c$) cuya resolución se reduce a una ecuación de segundo grado, y el de las raíces racionales de los polinomios con coeficientes enteros (tema incluido en el programa pero casi inexistente en el tratamiento en clase).

La ausencia de un auténtico cuestionamiento tecnológico de las técnicas matemáticas que se utilizan en la enseñanza secundaria comporta que sea muy difícil preguntarse, en dicha institución sobre la utilidad, el coste, la justificación y el alcance (o dominio de validez) de dichas técnicas. De hecho, problematizar las técnicas no forma parte de las responsabilidades matemáticas que el contrato didáctico asigna a los alumnos de la enseñanza secundaria. Incluso podemos afirmar que esta responsabilidad matemática tampoco está asignada al profesor de enseñanza secundaria como tal profesor. Todo está preparado para que las técnicas "funcionen" siempre que se las requiera y para que no exista ningún conflicto entre las técnicas de que se dispone y las tareas matemáticas que se proponen.

Partiendo de la actividad matemática que aparece en los libros de texto de Bachillerato[5] en torno al cálculo de raíces enteras de ecuaciones polinómicas, nos proponemos mostrar que, con la ayuda de un adecuado *cuestionamiento tecnológico*, es posible *desarrollar el trabajo de la técnica* en una dirección tal que provoque la ampliación de los tipos de ecuaciones que pueden abordarse y, al mismo tiempo, comporte la necesidad de llevar a cabo una actividad matemática *flexible* en el sentido de que esté relativamente libre de los cinco aspectos de la rigidez que hemos descrito en Fonseca (2004): *dependencia de la nomenclatura asociada a una técnica*, *la aplicación de una técnica no incluye la interpretación del resultado, inexistencia de dos técnicas diferentes para realizar una misma tarea, no reversión de las técnicas para realizar la tarea* "*inversa*" *de una tarea dada, ausencia de situaciones abiertas que requieren un trabajo de modelización.*

Todo ello comportará, como veremos, que la propia actividad matemática, a medida que se vaya desarrollando, deberá justificar las razones de ser de las tareas nuevas que van apareciendo y deberá conseguir además crear una técnica cada vez más resistente y suficientemente potente para abarcar las sucesivas ampliaciones del campo de problemas. Tendremos, en definitiva, el germen de una OM local relativamente completa.

Si hacemos un recorrido por los distintos manuales de Bachillerato, observamos que las funciones elegidas para llevar a cabo la tarea de *representar gráficamente funciones polinómicas*, análogas a las siguientes:

$f(x) = x^3 - 3x$	$f(x) = x^3 + x$	$f(x) = x^4 - 2x^2$	$f(x) = 2x^3 - 8x + 1$
$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$	$f(x) = -3x^4 + 4x^3$	$f(x) = x^3 - 3x + 2$
$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$	$f(x) = x^4 - 4x^3$	$f(x) = x^3 - 3x$	$f(x) = x^4 - 6x^2$
$f(x) = x^4 - 4x^3 + 3$	$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 36x^2 + 100$		$f(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

Una de las subtareas que se le proponen al alumno para representar gráficamente estas funciones polinómicas es la de calcular los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje de las "x", lo que equivale a resolver la ecuación asociada $f(x) = 0$.

Si analizamos las ecuaciones asociadas a las funciones polinómicas citadas, observamos que la mayoría están preparadas para que admitan como raíces algunos de los números: 0, ±1 ó ± 2. Además, el término independiente siempre tiene muy pocos divisores, por lo que el número de posibles raíces enteras es muy pequeño en cada caso. De esta manera se consigue que la técnica dominante (la regla de Ruffini) "funcione" de manera muy económica y eficaz en todos los casos, evitando así todos los conflictos entre la

[5] Utilizaremos los libros de texto de Bachillerato que corresponden a las últimas ediciones de las editoriales de mayor difusión del estado español (SM, Anaya, Santillana y McGrawHill).

tarea y la técnica (limitaciones, alcance, etc.). La regla se aplica en la mayor parte de los casos de una forma completamente estereotipada, sin ninguna variación, sin sufrir ningún tipo de desarrollo y, en definitiva sin que se plantee ningún cuestionamiento tecnológico. El tipo de tareas que aparecen en los libros de texto es, en consonancia, muy cerrado y preparado para que no plantee ningún problema a la técnica.

En definitiva, la regla de Ruffini acaba teniendo en la enseñanza secundaria un carácter auto-tecnológico, como si fuese transparente y no necesitase de ningún tipo de justificación más allá de la comprobación empírica de que, efectivamente, "funciona". Como no se proponen tareas que provoquen ningún tipo de conflicto con la utilización estereotipada de la regla de Ruffini, nunca aparece la necesidad, en el trabajo matemático que se realiza efectivamente, de flexibilizar dicha técnica, de modificarla ligeramente para aplicarla a un caso especial ni, mucho menos, de analizar y cuestionar su coste, su alcance o su justificación. Esta ausencia de cuestionamiento tecnológico de la regla de Ruffini se manifiesta incluso en el impulso de los sujetos de la institución a comenzar a calcular las raíces enteras de un polinomio sin tener en cuenta la posibilidad de su no-existencia.

Una de las consecuencias prácticas de estos hechos es que se expulsan fuera de la enseñanza secundaria algunos tipos de tareas matemáticas, como la *representación gráfica de funciones polinómicas sencillas* cuyo término independiente tiene bastantes divisores o cuyas raíces no son enteras (tanto si son racionales como si son irracionales).

Se produce de esta forma un *empobrecimiento en cadena* de las organizaciones matemáticas que se estudian. Éste es un fenómeno de largo alcance del cual la regla de Ruffini constituye únicamente un ejemplo: el hecho de no poder utilizar versiones flexibles de las técnicas elementales para construir técnicas más complejas implica que las construcciones sucesivas de organizaciones matemáticas estarán siempre centradas en tipos de tareas relativamente estereotipadas.

Podemos resumir lo anterior diciendo que el tipo de tareas matemáticas que aparecen en la enseñanza secundaria en torno al cálculo de las raíces de un polinomio, al menos cuando ésta deja de ser la tarea principal para convertirse en auxiliar de otras tareas más complejas, genera una organización matemática *puntual* y *rígida* en todos los aspectos descritos anteriormente.

3. La regla de Ruffini en el paso de Secundaria a la Universidad

Si consideramos ahora la institución universitaria, también se puede mostrar que, en los estudios de primer ciclo de matemáticas, especialmente en las asignaturas de cálculo diferencial o de álgebra elemental, en lugar de retomar la regla de Ruffini, mostrar sus limitaciones, desarrollarla e integrarla en una organización matemática más completa en torno a la resolución de ecuaciones, se ignora completamente esta articulación y se proponen métodos de resolución de ecuaciones completamente independientes de los construidos en la enseñanza secundaria. Además, tampoco se suele cuestionar en la enseñanza superior el alcance y las limitaciones de la técnica considerada, es decir la delimitación de la clase de ecuaciones polinómicas que se pueden resolver (de manera exacta o aproximada). Como hemos dicho anteriormente, el uso sistemático de la regla de Ruffini en la enseñanza secundaria conduce a los alumnos a pensar que los polinomios con coeficientes enteros, o bien tienen una raíz entera "evidente" (divisora del término independiente del polinomio) que se determina mediante la regla de Ruffini, o no la tiene.

En este sentido, la regla de Ruffini constituye un buen ejemplo de un fenómeno didáctico que podemos enunciar de la siguiente manera:

> *La rigidez de las organizaciones matemáticas "elementales" que se (re)construyen en la enseñanza secundaria no disminuye cuando éstas se utilizan en la enseñanza universitaria, aunque se disponga de los elementos tecnológicos que podrían cuestionarlas, flexibilizarlas y desarrollarlas.*

A fin de comprobar, de manera meramente exploratoria, que esta rigidez no disminuye cuando la regla de Ruffini se utiliza en la enseñanza universitaria, propusimos durante el curso 1999-2000 a una muestra de 128 alumnos de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial y de la Escuela Superior de Ingeniería Industrial de la Universidad de Vigo, la siguiente tarea:

> *Calcular las soluciones enteras de la ecuación* $x^3 - 61x^2 - 50x + 135 = 0$

Comprobamos que 79 alumnos (el 61,71 %) intentaron calcular las raíces utilizando la Regla de Ruffini; 26 alumnos (el 20,31 %) empezaron calculando el valor numérico del polinomio para cada uno de los divisores del término independiente y los 23 alumnos restantes (el 17,96%) dejaron en blanco el ejercicio. De entre los 105 alumnos (el 82% del total) que intentaron resolver la ecuación, *ninguno de ellos se planteó la posibilidad de la no existencia de soluciones enteras*.

Creemos que las respuestas de estos alumnos reflejan el escaso cuestionamiento tecnológico que existe en relación con las técnicas de resolución de ecuaciones polinómicas y, en particular, alrededor de la regla de Ruffini. La uniformidad y casi unanimidad de las respuestas obtenidas pone de manifiesto que la actividad dominante ante la tarea propuesta consiste en empezar calculando los divisores del término independiente (que, en este caso, son ±1, ±3, ±5, ±9, ±15, ±27, ±45 y ±135) y, a continuación, comprobar para cada uno de ellos si es o no es una raíz del polinomio, ya sea utilizando la regla de Ruffini o bien calculando el valor numérico del polinomio para dicho valor de x.

La rigidez y ausencia de cuestionamiento tecnológico provoca, entre otros efectos indeseables, que cuando se dispone de una técnica, ésta se use *prescindiendo completamente del coste que comporta dicho uso.* La explicación es sencilla: en la enseñanza secundaria la única actividad que los alumnos aprenden a realizar con una técnica es *aplicarla para realizar una tarea concreta*. En nuestro ejemplo, el coste de utilizar la técnica de que se dispone es excesivo porque, al no existir raíces enteras, la técnica estereotipada que se utiliza requiere de una gran cantidad de cálculos pesados y, en definitiva, bastante inútiles.

Supongamos, por ejemplo, que los alumnos hubiesen dispuesto de un resultado tecnológico sencillo tal como el siguiente:

> θ_1: Si $f(x)$ es una función polinómica con coeficientes enteros y $f(0)$ y $f(1)$ son números impares, entonces la ecuación polinómica $f(x) = 0$ no tiene soluciones enteras. (Ver Anexo)

Este resultado les hubiera evitado la necesidad de calcular los divisores de 135 y de llevar a cabo el resto de cálculos inútiles, puesto que en este caso $f(0) = 135$ y $f(1) = 25$ son impares y, por lo tanto, podemos asegurar que el polinomio $x^3 - 61x^2 - 50x + 135$ no tiene raíces enteras. Además este resultado tiene una justificación basada en la descomposición de Taylor del polinomio que, aunque no pueda estar disponible en la enseñanza secundaria, sí lo estará muy pronto en el primer curso universitario. Se podrían crear así en Secundaria necesidades tecnológico-teóricas que podrían ser retomadas en el futuro cercano como punto de partida de nuevos procesos didácticos:

4. Desarrollo de la regla de Ruffini

Mostraremos que, con ayuda de un adecuado *cuestionamiento tecnológico*, es posible *desarrollar el trabajo de la técnica* “regla de Ruffini” en una dirección tal que provoque la ampliación de los tipos de ecuaciones que pueden abordarse. Partimos de un tipo de tareas, que designaremos por T_1, y que está presente en la enseñanza la secundaria.

> T_1: *Calcular las soluciones de ecuaciones polinómicas con coeficientes enteros y que tengan todas las soluciones enteras*.

Un espécimen de este tipo de tareas es el siguiente:

> *Resolver la ecuación* $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Dado que $f(0) = 6$ y $f(1) = 4$, es posible que exista alguna raíz entera y, en ese caso, debe ser forzosamente un divisor del término independiente que es 6. Las posibles raíces enteras son ±1, ±2 y ±3.

	1	-4	1	6
-1		-1	5	-6
	1	-5	6	0
2		2	-6	
	1	-3	0	

Las soluciones son $x = -1$, 2 y 3, por lo que tenemos la descomposición factorial:

$$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$$

Para “rutinizar” esta técnica y “experimentarla” con un material empírico suficientemente rico, se pueden considerar ecuaciones similares a la anterior, como, por ejemplo:

$$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0. \text{ Raíces: } x = 1, 3 \text{ y } 5$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0. \text{ Raíces } x = 1 \text{ (doble) y } x = -5$$

Llamaremos τ_1 a esta primera técnica. Es una técnica ligada a un tipo de tareas concretas y, desde este punto de vista, aparece en los manuales de la enseñanza secundaria como una técnica natural o canónica. No es cuestionable en dicha institución porque es considerada como “la manera de calcular las raíces (enteras) de las ecuaciones polinómicas (preparadas)”.

A fin de flexibilizar la técnica τ_1, lo que permitirá desarrollarla y relacionarla con otras técnicas (cosa que raramente se realiza en la enseñanza secundaria), planteamos en este momento *cuestiones tecnológicas* relativas a τ_1:

> *¿Cuál es el alcance o dominio de validez de τ_1? ¿Para qué tipo de ecuaciones polinómicas no será aplicable? ¿Existen, para esos casos, técnicas alternativas? ¿Es posible modificar ligeramente τ_1 de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? ¿Qué modificaciones son necesarias?*

A fin de poner a prueba la resistencia de la técnica creada proponemos un segundo tipo de tareas.

> T_2: *Resolver ecuaciones polinómicas de grado $n \geq 3$ con coeficientes enteros*.

Un ejemplar de este segundo tipo de tareas es el siguiente:

Resolver la ecuación $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = 0$.

Aparece la primera situación relativamente conflictiva porque después de calcular todos los divisores de 6 y comprobar que sólo $x = 2$ es solución, nos encontramos con el problema de que el resto de raíces reales, si existen, no se pueden calcular utilizando la técnica anterior τ_1 porque no son enteras.

¿Como calcular las otras dos raíces si existen? ¿Es posible modificar ligeramente τ_1 de manera que se amplíe el campo de problemas al que es aplicable? En la enseñanza secundaria aparece, de hecho, una pequeña modificación de la regla de Ruffini que permite resolver la ecuación anterior: después de obtener una raíz entera, *si el polinomio inicial era de grado* 3, basta factorizar el polinomio inicial y resolver una ecuación de segundo grado para calcular las otras dos raíces (o bien para asegurarse de que éstas no existen). Llamaremos a esta variación de la técnica inicial τ_{11}. En nuestro ejemplo, se obtienen –1,73205 y 1,73205.

Pero en la enseñanza secundaria dicha variación de la regla de Ruffini no se considera como tal y, lo que es más importante, no se utiliza para poner de manifiesto que, si la ecuación polinómica fuese de grado mayor que 3 y sólo tuviese una raíz entera, entonces no podría aplicarse τ_{11}. Tampoco se utiliza sistemáticamente para resolver ecuaciones de grado n > 3 con coeficientes enteros que tengan, como mínimo, $n - 2$ soluciones enteras.

Forman parte de este segundo tipo, tareas tales como:

Resolver $6x^3 - 13x^2 + 9x - 2 = 0$. Raíces $x = 1, 1/2, 2/3$.

Resolver $12x^3 + 13x^2 - 20x + 4 = 0$. Raíces $x = -2, 1/4, 2/3$.

El dominio de validez de τ_{11} es mayor que el de τ_1 puesto que es aplicable a todas las ecuaciones polinómicas de grado n siempre que tengan, como mínimo, $n - 2$ raíces enteras. A medida que se continúa rutinizando τ_{11} aparece una segunda cuestión tecnológica:

> *¿Es posible calcular con τ_{11}, de una manera razonablemente económica, todas las raíces de cualquier ecuación polinómica de grado tres que tenga, como mínimo, una raíz entera? Y, en general, ¿es posible calcular con un coste razonable todas las raíces de cualquier ecuación polinómica de grado n que tenga, al menos, $n - 2$ raíces enteras?*

La respuesta tecnológica provocará las primeras *formulas de acotación* del valor absoluto de las raíces. Técnicamente se trata de economizar el funcionamiento de τ_{11} limitando el número de posibles candidatos a raíces de la ecuación porque el "coste" de la técnica τ_{11} aumenta muy rápidamente cuando se trata de resolver ecuaciones polinómicas cuyo término independiente tiene un número grande de divisores.

Consideremos, por ejemplo, el siguiente problema:

Resolver la ecuación $x^3 - 70x^2 + 1400x - 8000 = 0$

Dado que 8000 tiene 56 divisores:

1	2	4	8	16	32	64	-1	-2	-4	-8	-16	-32	-64
5	10	20	40	80	160	320	-5	-10	-20	-40	-80	-160	-320
25	50	100	200	400	800	1600	-25	-50	-100	-200	-400	-800	-1600
125	250	500	1000	2000	4000	8000	-125	-250	-500	-1000	-2000	-4000	-8000

el *coste* de utilización de la técnica τ_{11} para realizar esta tarea es considerable en términos de esfuerzo, precisión y posibilidad de cometer errores. Cabe entonces hacer un segundo cuestionamiento tecnológico de la técnica con el objetivo de disminuir, si es posible, dicho coste.

> *¿Es necesario probar, en todos los casos, todos los divisores del término independiente? ¿Hay alguna posibilidad de acortar ese proceso?*

Una buena tecnología debería disminuir el coste de τ_{11} e intentar resolver esa tarea con un coste mínimo. Supongamos que la fórmula de Cardano-Vieta formara parte del entorno tecnológico de la regla de Ruffini:

> θ_2: *Si todas las raíces de la ecuación* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ *son reales, entonces toda raíz* x_i *de la ecuación pertenece al intervalo* $[-M, M]$ *siendo* $M \leq \sqrt{\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)^2 - 2\left(\frac{a_{n-2}}{a_n}\right)}$.

En este caso la técnica τ_{11} sería mucho más económica y mucho más fiable.

En nuestro caso particular este resultado tecnológico limita las posibles raíces al intervalo $[-46, 46]$ y nos permite reducir considerablemente el número de candidatos a raíces enteras:

1	2	4	8	16	32		-1	-2	-4	-8	-16	-32
5	10	20	40				-5	-10	-20	-40		
25							-25					

La tecnología incide así directamente sobre la práctica matemática produciendo una *disminución del coste de la técnica*. De los 56 candidatos iniciales pasamos a únicamente 22. Pero el coste de τ_{11} aún sigue siendo grande. ¿Que posibilidades hay de disminuir todavía más la posibilidad de cometer errores y, en consecuencia, el coste?

La respuesta a esta cuestión viene dada por un nuevo resultado tecnológico.

> θ_3: *(Regla de Descartes) Si n es el número de cambios de signo de los coeficientes de un polinomio* $f(x)$ *y m su número de raíces positivas, entonces* $m \leq n$ *y* $n - m$ *es par. El número de raíces negativas se obtiene repitiendo el proceso anterior para* $f(-x)$.

De acuerdo con este resultado tecnológico toda ecuación polinómica de grado 3 cuyos coeficientes tengan signos alternados como, por ejemplo: $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$ (donde a, b y $c > 0$), en el supuesto de que tenga raíces reales, entonces todas serán positivas. Mientras que toda ecuación polinómica de grado 3 de la forma $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ (donde a, b y $c > 0$), caso de tener raíces reales, todas serán negativas.

Esto nos permite, en nuestro ejemplo, restringir todavía más el número de candidatos pasando de 22 a 11 y quedarnos sólo con los candidatos positivos.

1	2	4	8	16	32
5	10	20	40		
25					

Pero todavía podemos disminuir más el coste de la técnica τ_{11}. Para ello podemos utilizar otro resultado tecnológico:

> θ_4: *Si* $f(x)$ *es un polinomio con coeficientes enteros y a es una raíz entera de* $f(x)$, *entonces* $a-1$ *es un divisor de* $f(1)$ *y* $a+1$ *es un divisor de* $f(-1)$.

Al aplicarlo a nuestro ejemplo particular resulta que $\dfrac{f(1)}{a-1}$ da división exacta únicamente con los divisores siguientes:

2	4	
10	20	40

Pero como que $\dfrac{f(-1)}{a+1}$ sólo da división exacta con:

10	20	40

Resulta que las únicas posibles raíces enteras de la ecuación

$$x^3 - 70x^2 + 1400x - 8000 = 0$$

son 10, 20 y 40.

Las técnicas τ_1 y τ_{11}, que aparecen como incuestionables en la enseñanza secundaria, tienen un alcance muy limitado debido a que el *coste* aumenta muy rápidamente con el simple aumento del número de divisores del término independiente de la ecuación.

Llamaremos τ_2 a la técnica que se obtiene de *disminuir el coste* de τ_{11} mediante la utilización de los elementos tecnológicos θ_1, θ_2, θ_3 y θ_4. Esta técnica τ_2 surge como consecuencia del desarrollo de las técnicas τ_1 y τ_{11} y tiene un coste mucho menor.

A continuación se proponen nuevas tareas de rutinización, para dominar la técnica τ_2:

$$x^3 - 53x^2 + 532x - 480 = 0. \qquad \text{Raíces: } x = 1,\ 12 \text{ y } 40$$

$$x^3 - 88x^2 + 1620x + 3600 = 0. \qquad \text{Raíces: } x = -2,\ 30 \text{ y } 60$$

El trabajo técnico rutinizado con τ_2 para obtener las soluciones de una ecuación polinómica hace emerger de manera natural la siguiente cuestión tecnológica:

> *¿Cuál es el alcance y cuáles son las limitaciones de la técnica* τ_2*? ¿Cómo hay que modificar* τ_2 *para resolver una ecuación polinómica de grado tres que tenga al menos una solución racional pero ninguna solución entera?*

A fin de poner a prueba la resistencia o robustez de la técnica τ_2 proponemos un tercer tipo de tareas.

> T_3: *Resolver ecuaciones polinómicas de grado 3 con coeficientes enteros que tengan, como mínimo, una solución racional (no entera).*

Un espécimen de este segundo tipo de tareas es el siguiente:

> *Resolver la ecuación* $60x^3 - 274x^2 + 340x - 96 = 0$

La utilización de la técnica τ_2 nos permite afirmar que la ecuación propuesta no tiene raíces enteras, pero no nos permite calcular las posibles raíces reales no enteras de dicha ecuación. Se trata, por lo tanto, de una tarea que muestra las *limitaciones* de τ_2 por lo que se requiere explorar nuevas técnicas o mejorar las técnicas anteriores.

¿Es posible modificar τ_2 para ampliar su dominio de validez de manera que abarque el cálculo de raíces racionales? La respuesta depende de un elemento tecnológico que, como tal, forma parte del currículum de la enseñanza secundaria (y es "demostrable" en esta institución), aunque su incidencia en la práctica matemática que se realiza efectivamente en el aula es muy pequeña:

> θ_5: *Si $x = m/n$ (con m y n primos entre sí) es una solución racional de una ecuación polinómica con coeficientes enteros, entonces m debe ser divisor del término independiente y n debe ser divisor del coeficiente de grado máximo.*

Por lo tanto, todas las raíces racionales pueden escribirse como una fracción cuyo denominador coincide con el coeficiente de grado máximo de la ecuación polinómica. En nuestro ejemplo, y en el supuesto de que la ecuación dada tenga raíces racionales, haciendo el cambio de variable $x = z/60$ obtendremos una ecuación en z con soluciones enteras. Resulta, en efecto, que aplicando a dicha ecuación la técnica anterior τ_2 se obtienen las soluciones siguientes: $z = 24$, 90 y 160. Deshaciendo el cambio de variable obtenemos tres soluciones racionales para la ecuación inicial: $x = 2/3$, $3/2$ y $8/3$.

A esta nueva técnica, que consiste en componer el citado cambio de variable con la técnica τ_2, podemos denominarla τ_3. Es una técnica útil para calcular las raíces racionales de una ecuación polinómica y, evidentemente, vuelve a ampliar el campo de problemas. Su dominio se extiende, en principio, a todas las ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales de grado n siempre que tenga, como mínimo, $n - 2$ soluciones racionales.

Está claro que también τ_3 sigue presentando importantes limitaciones si lo que se pretende es calcular las soluciones de una ecuación polinómica cualquiera. Basta con que los coeficientes no sean todos racionales o bien la ecuación en cuestión no tenga suficientes soluciones racionales. El trabajo de la técnica podría así continuar con nuevas variaciones de τ_3, aparecerían nuevas necesidades tecnológicas y nuevas ampliaciones del campo de problemas.

5. A modo de conclusión

Así, el *trabajo de la técnica* se manifiesta una vez más como un trabajo "creativo", esto es, *productor de nuevas tareas*, *de nuevas necesidades tecnológicas y de nuevas técnicas*. El desarrollo del trabajo de la técnica ha producido, incluso, técnicas que permiten resolver cuestiones planteadas al *nivel tecnológico* respecto de la técnica inicial. Desde este punto de vista, la técnica inicial τ_1 (junto a τ_{11}) que aparecía como *la manera de resolver las ecuaciones polinómicas* (de grado mayor que 2) en la enseñanza secundaria, es una técnica muy rudimentaria, con un alcance muy pequeño y sólo aplicable a un tipo muy restringido de tareas[6].

[6] Para un análisis de las funciones del momento del trabajo de la técnica dentro del proceso de estudio de una organización matemática, ver Bosch y Gascón (1994) y, también, Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 286-290).

Hemos visto de qué forma el cuestionamiento tecnológico de las técnicas ha dirigido el desarrollo de la actividad matemática transformándola en una actividad más flexible, que posibilita realizar las tareas propuestas de manera más económica (con un coste menor). Además la actividad así transformada tiene un alcance mayor porque las nuevas técnicas tienen un dominio de validez más amplio en cuanto a los tipos de tareas que permiten realizar.

El caso examinado aquí no es un hecho aislado. Lo más habitual es que la enseñanza universitaria no retome las organizaciones matemáticas que se construyen en Secundaria, no las desarrolle adecuadamente utilizando los elementos tecnológicos que proporcionan la matemática enseñada y no las articule con las nuevas organizaciones matemáticas que se construyen (por ejemplo para mostrar sus limitaciones y delimitar mejor su ámbito de aplicación). Y éste es, a nuestro entender, uno de los factores esenciales de la *ruptura* entre las matemáticas que se estudian en ambas instituciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas, *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), 314-332.

BOSCH, M., FONSECA, C. y GASCÓN, J (2004). Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2.3, 205-250.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori: Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, 221-266.

FONSECA, C. (2004). *Discontinuidades Matemáticas y Didácticas entre la Secundaria y la Universidad*. Tesis doctoral. Universitat de Vigo.

LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

NEVOT, A., RODRÍGUEZ, R., SOLER, J., NEGRO, A. (2002). *Matemáticas. 1º de BACHILLERATO*. Madrid: Editorial McGraw-Hill.

ABELLANAS, L., GARCÍA, J., MARTÍNEZ, C. (2002). *Matemáticas. 2º de BACHILLERATO*. Madrid: Editorial McGraw-Hill.

NORTES, A., JIMÉNEZ, P., LOZANO, F., MIÑANO, A., RÓDENAS, J. (2002). *Matemáticas 1º de BACHILLERATO*. Madrid: Editorial Santillana.

BOBILLO, N., GARCÍA, Mª (2002). *Matemáticas 2º de BACHILLERATO*. Madrid: Editorial Santillana

COLERA, J., OLIVEIRA, Mª. GARCÍA, R., FERNÁNDEZ, S., (2000). *Matemáticas. 1º de BACHILLERATO*. Madrid. Editorial Anaya.

COLERA, J., OLIVEIRA, Mª. GARCÍA, R., (2001). *Matemáticas. 2º de BACHILLERATO*. Madrid. Editorial Anaya.

ANEXO

θ_1: Si $f(x)$ es una función polinómica con coeficientes enteros y $f(0)$ y $f(1)$ son números impares, entonces la ecuación polinómica $f(x) = 0$ no tiene soluciones enteras.

En efecto :

El desarrollo de Taylor de grado n del polinomio en torno a $x = a$ es:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Evaluando esta expresión en $x = 2n$ y $a = 0$ se obtiene que todos los términos son pares excepto $f(0)$ que es impar, luego $f(2n)$ no puede anularse:

$$f(2n) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(2n) + \frac{f''(0)}{2!}(2n)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(2n)^n$$

Evaluando esta expresión en $x = 2n + 1$ y $a = 1$ se obtiene que todos los términos son pares excepto $f(1)$ que es impar, luego $f(2n + 1)$ no puede anularse:

$$f(2n+1) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(2n) + \frac{f''(1)}{2!}(2n)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(2n)^n$$