RECONSTRUCCIÓN DE UNA ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA: Sistema de numeración posicional. Bases y relaciones entre ellas[1].

Antonio Estepa Castro
Universidad de Jaén

Resumen: En el presente trabajo se reconstruye una organización matemática de los sistemas de numeración posicionales, las bases en que se expresan, las relaciones entre ellas y las operaciones fundamentales en las distintas bases. También se esboza la organización didáctica asociada, partiendo de una situación fundamental, de una cuestión generatriz que da sentido al inicio del proceso de estudio. Se finaliza con unas conclusiones.

Résumé: Dans ce travail on reconstruit une organisation mathématique des systèmes de numération positionnels, leurs bases et les rapports entre elles et les opérations fondamentales dans les différentes bases. On dresse aussi une ébauche de l'organisation didactique associée, à partir d'une situation fondamentale, d'une question génératrice qui donne sens au départ du processus d'étude.

Abstract: This paper proposes a mathematical organization on positional numeration systems the basis in which they are expressed, the relations between them and the fundamental operations in different basis. Is also drafted the associated didactic organization, starting from a fundamental situation, a generative question that gives sense to the starting point of the study process.

1. INTRODUCCIÓN

En la formación de matemáticas y su didáctica, que se imparte en las universidades españolas a los alumnos de las Titulaciones de Maestro, aparece un tema de obligado estudio: "Los sistemas de numeración posicionales", incluido en el sector "Sistemas numéricos"[2]. Este tema de estudio plantea un problema docente a los profesores del Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática de las universidades españolas que podemos enunciar de la siguiente manera:

> PD1. *"¿Cómo enseñar el sistema de numeración posicional, las bases que se pueden utilizar, las interrelaciones entre ellas y las operaciones fundamentales, a los alumnos de las Titulaciones de Maestro de las universidades españolas".*

[1] Este trabajo se ha realizado en el marco del Proyecto de Investigación BSO2003-06331/PSCE, subvencionado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación, Dirección General de Investigación, Secretaría General de Política Científica y Tecnológica, Ministerio de Educación y Ciencia.

[2] La Teoría Antropológica de lo Didáctico postula ocho niveles de codeterminación: Sociedad → Escuela → Pedagogía → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión, (Chevallard, 2002)

Este problema se puede estudiar con sentido en esta institución porque tiene los tres tipos de legitimidad postulados en Chevallard, Bosh y Gascón (1997), legitimidad cultural, matemática y social

Cada docente enfoca este problema, planificando la enseñanza desde el punto de vista que cree más adecuado a la especialidad y al grupo de alumnos.

En el desarrollo que expondremos en lo que sigue los objetivos que se pretenden son:

Objetivos: a) Construir la expresión de un número cualquiera en otra base distinta a la base 10.

b) Adquirir las competencias necesarias para pasar un número de base diez a base cualquiera y viceversa.

c) Adquirir las competencias necesarias para iniciar las operaciones fundamentales en cualquier base, utilizando los algoritmos usuales.

d) Aplicar los conocimientos adquiridos para justificar algoritmos de operaciones fundamentales, distintos de los usuales, como los algoritmos de la multiplicación egipcio o el ruso.

En este trabajo voy a acometer este problema desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (en adelante TAD). Puesto que el Congreso está dedicado a la TAD y, en consecuencia, creo que esta teoría es conocida por los posibles lectores de este trabajo, no voy a realizar un resumen de ella, sin embargo, si explicitaré y justificaré los elementos que utilice.

En primer lugar, para acometer el problema docente PD1, es necesario considerar el tema de estudio matemático, en nuestro caso, el sistema de numeración posicional (SNP), la realidad matemática que puede construirse respecto a él, es decir la praxeología matemática u organización matemática que denominaremos OM_{SNP} y la manera en que puede ser construida esa realidad matemática, es decir, la manera como puede realizarse el estudio de SNP, lo que en la TAD se denomina organización didáctica y se representa por $OD_{SNP} = \delta OM_{SNP}$ (Chevallard, 1999).

2. ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA[3]. (OM_{SNP})

Antes de reconstruir la organización matemática, se asume que los alumnos conocen el sistema de numeración posicional decimal, conocen la técnica de descomposición polinómica de un número en potencias de diez y su tecnología asociada, así como la designación de sus órdenes de unidades. También saben leer cualquier número en base 10.

Las cuestiones que planteamos son Π_1, Π_2, Π_3 y Π_4 que, junto con sus técnicas y tecnologías asociadas, se describen brevemente a continuación.

---

[3] Existen otros trabajos sobre Numeración dentro del marco de la TAD, como por ejemplo, Sierra y Gascón (2003), pero mientras este estudia la Numeración en general, yo me limitaré solamente a los sistemas posicionales.

Π_1: ¿Cómo es la estructura de la expresión de un número, en base cualquiera, en el sistema de numeración posicional?

Esta cuestión se resuelve con la técnica τ_1 que a continuación se describe y sus tecnologías asociadas, pertenecientes a la teoría de números.

τ_1 : Si un número está expresado en base *n* en un sistema de numeración posicional, significa que:

$$\ldots \underline{e\,d\,c\,b\,a}_{(n} = \ldots e\cdot n^4 + d\cdot n^3 + c\cdot n^2 + b\cdot n^1 + a\cdot n^0$$

ordenes de unidades } 5º 4º 3º 2º 1º

La tecnología asociada a esta técnica la podemos resumir de la siguiente manera:

θ_1: El fundamento de los sistemas de numeración posicionales es el siguiente:

a) Se toma como base un número natural *n* mayor que uno y se adoptan símbolos, denominados guarismos o cifras para representar el cero y los números inferiores a la base.
b) El número 1 recibe el nombre de unidad. Cada *n* unidades de un orden constituye una unidad del orden inmediatamente superior.
c) Los números mayores que la base se expresan escribiendo varias cifras, unas a continuación de otras. La primera cifra de la derecha representa la unidades simples o de primer orden; la segunda las unidades de segundo orden, la tercera, las de tercer orden, y así sucesivamente[4]. Utiliza el principio del valor relativo: una cifra colocada a la izquierda de otra representa el orden de unidades inmediatamente superior a esta.
d) Cuando no existen unidades de un orden se escribe cero en el lugar correspondiente.
e) La representación de todo número en una base *n* siempre es posible y además es única.

Segundo cuestión:

Π_2: Dado un número en una base cualquiera en el sistema de numeración posicional, ¿cómo se expresa en otra base distinta?

Esta cuestión general se suele dividir en los tres subcuestiones, Π_2 a), Π_2 b) y Π_2 c), cuyas técnicas y tecnologías, incluidas en la teoría de números, se describen brevemente a continuación, tomando como referencia la base 10, que dominan los alumnos a los que se dirige el estudio de estas cuestiones.

[4] He optado por este nombre de los órdenes de unidades porque creo que es el más extendido, y que se corresponde con el orden natural de derecha a izquierda. Algunos autores nombran los ordenes de unidades como unidades de orden cero, unidades de primer orden, unidades de segundo orden, ..., adoptando el índice de la potencia de la base correspondiente al orden de unidades.

Π_2 a): Dado un número en una base cualquiera en el sistema de numeración posicional, ¿cómo se expresa en base 10?

La técnica más popular suele ser la que utiliza la descomposición polinómica del número, es decir,

τ_2: Dado un número en base n, para expresarlo en base 10, si el número tiene $m+1$ cifras, se procede así:
$N = lkh\ldots cba_{(n} = ln^m+kn^{m-1}+hn^{m-2}+\ldots+cn^2+bn+a$
Operando en base 10 obtenemos la expresión de N en base 10

La tecnología asociada es la θ_1.

Esta técnica se suele modificar aplicando a la expresión polinómica,

$$ln^m+kn^{m-1}+hn^{m-2}+\ldots+cn^2+bn+a,$$

la regla de Ruffini.

Π_2 b): Dado un número en base 10, expresarlo en una base cualquiera n.

La técnica utilizada suele ser la siguiente:

τ_3: Expresión de un número en base n

- Para expresar un número N en la base n, se divide por esta base el número N y los cocientes enteros que vayan resultando, mientras que estos cocientes sean superiores a la base. Si $a, b, c, \ldots h, k$ son los restos enteros por defecto de las divisiones efectuadas y $l < n$ el último cociente obtenido, la expresión del número en base n es: $lkh\ldots cba_{(n}$

La tecnología asociada a esta técnica es parte de θ_1 b), ya que en la primera división obtenemos como cociente las unidades de segundo orden y como resto las de primer orden, que son inferiores a la base por ser resto de dividir por la base. En la segunda división obtenemos como cociente las unidades de tercer orden y como resto las de segundo orden, etc.

Π_2 c): Dado un número en una base cualquiera distinta de la decimal, expresarlo en otra base cualquiera, distinta de la decimal.

Las técnicas utilizadas para resolver esta cuestión es la aplicación sucesiva de las τ_2 y τ_3, primero se pasa de base cualquiera a base 10, se aplica τ_2, a continuación se pasa de base 10 a la base indicada, se aplica τ_3.

Π_3: ¿Cómo se utiliza la estructura del sistema de numeración posicional de base cualquiera para realizar las operaciones en base cualquiera utilizando los algoritmos usuales en base 10?

Las técnicas y tecnologías utilizadas son las mismas que en base 10 y las veremos en el proceso de estudio.

Π_4: ¿Cómo se realizan las operaciones elementales con números expresados en cualquier base del sistema posicional?

Las técnicas y tecnologías utilizadas son las mismas que en base 10 y las explicitaremos en el proceso de estudio.

3. PROCESO DE ESTUDIO

Para describir el proceso de estudio, partimos de una situación fundamental (Q1) que se constituye en la cuestión generatriz de la organización didáctica.

Q1. LAS PESADAS

Un desempleado lee en el periódico el siguiente anuncio "SE NECESITAN dos personas para pesar y anotar los pesos realizados, más información en ... ".

El desempleado se presenta en el lugar indicado para informarse sobre el trabajo y le dicen: "Nuestra empresa se dedica a pesar objetos diversos de diferentes tamaños y pesos. Trabajamos para dos empresas:

- La empresa A, quiere que los pesos se realicen con el siguiente sistema de pesas, S4: 1 kg, 4 kg, 16 kg, 64, kg, ... (se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor).
- La empresa B quiere que los pesos se realicen con el siguiente sistema de pesas: S5: 1 kg, 5 kg, 25 kg, 125 kg, ... (se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor).

Para las pesadas se utilizan balanzas de Roberval, en un platillo se pone el objeto a pesar y en el otro platillo las pesas.

El trabajo del equipo de dos personas consiste en lo siguiente: Un miembro del equipo debe realizar la pesada de un objeto, de la forma más eficaz posible, con uno de los dos sistemas, y dictar el resultado del peso al otro miembro del equipo, que lo debe anotar en una hoja de papel del modo más breve posible. Se entiende por resultado de la pesada la expresión del número de pesas de cada tipo que se han utilizado.

Este resultado debe ser óptimo, es decir, debe utilizar el menor número de pesas posible, ya que, cuantas menos pesas utilicemos, más rápidas se harán las pesadas y se pesarán más objetos en un mismo tiempo (las empresas buscan la eficacia), por ejemplo, si queremos pesar un objeto de 103 kg con el sistema S4, podemos utilizar 103 pesas de 1 kg. Obviamente, se tardaría mucho tiempo en poner y quitar las pesas en el platillo. También podíamos utilizar 25 pesas de 4 kilogramos y 3 de un kilogramo, en total 28 pesas, todavía son muchas mesas. El resultado óptimo sería 1 pesa de 64 kg, dos de 16 kg, una de 4 kg y 3 de 1 kg, en total 7 pesas.

Dentro de unos días realizaremos un examen a los miembros de los equipos que se presenten para obtener el trabajo. Le adjudicaremos el puesto de trabajo al equipo que haga y anote la pesada de la mejor manera posible, es decir, el que utilice menor número de pesas en las pesadas y el que invente el modo más breve de anotar los pesos obtenidos en cada pesada cuando se los dicte su compañero, así el trabajo irá más rápido, pues "el tiempo es oro".

Consigna: ¿Qué deben hacer dos miembros de un equipo para obtener el trabajo? Es decir, ¿Cómo se realizarían las pesadas con el menor número posible de pesas, en cada sistema? Y ¿Cómo se puede anotar, en cada sistema de pesas, el resultado de la pesada de la manera más breve posible?

Para comenzar, podéis intentar el resultado en S4 de las pesadas de objetos de 46 kg, 87 kg, 106 kg, 158 kg, 383 kg, ...

A continuación puedes expresar los resultados de las pesadas de los objetos anteriores utilizando S5.

En el primer momento[5] de estudio, en el primer encuentro, los estudiantes aceptan la tarea y se ven capacitados para realizarla. En el segundo momento, en la exploración de la tarea, aparece enseguida la primera técnica, que generalmente utilizan todos los estudiantes, consistente en restar sucesivamente la pesa de mayor valor hasta la de menor valor, comenzando por la pesa de valor inmediatamente inferior al peso propuesto. Así el peso de 103 en S4 se calcularía: 103-64=39; 39-16=23; 23-16=7; 7-4=3, luego la expresión del peso es 1 de 64kg, 2 de 16 kg, 1 de 4 kg, 3 de 1 kg (algunas veces en lugar de restar dos veces 16, restan una vez 32). Entonces se obtiene la siguiente técnica:

τ_0. Para encontrar el menor número de pesas en que se puede expresar el peso de un objeto se resta sucesivamente la pesa de mayor valor hasta la de menor valor, comenzando por la pesa de valor inmediatamente inferior al peso propuesto.

La tecnología asociada a esta técnica es la posibilidad de descomponer un número en una suma de sumandos.

Al especificar en la cuestión generatriz *"se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor"*, los estudiantes descubren que en S4 el valor de las pesas se corresponde con las potencias sucesivas de 4 y en S5 con las de 5.

Al poco tiempo de iniciar la tarea, en el momento del trabajo de la técnica, casi todos los estudiantes tienen una producción similar a esta:

46 kg			2 de 16 kg,	3 de 4 kg,	2 de 1 kg
87 kg		1 de 64 kg,	1 de 16 kg,	1 de 4 kg,	3 de 1 kg
106 kg		1 de 64 kg,	2 de 16 kg,	2 de 4 kg,	2 de 1 kg
158 kg		2 de 64 kg,	1 de 16 kg,	3 de 4 kg,	2 de 1 kg
343 kg	1 de 256 kg	1 de 64 kg,	1 de 16 kg,	1 de 4 kg,	3 de 1 kg

Y en S5:

46 kg		1 de 25 kg,	4 de 5 kg,	1 de 1 kg
87 kg		3 de 25 kg,	2 de 5 kg,	2 de 1 kg
106 kg		4 de 25 kg,	1 de 5 kg,	1 de 1 kg
158 kg	1 de 125 kg,	1 de 25 kg,	1 de 5 kg,	3 de 1 kg
343 kg	2 de 125 kg,	3 de 25 kg,	3 de 5 kg,	3 de 1 kg

Rápidamente surge la idea de transformarlas en tabla:

[5] La TAD, en el desarrollo del proceso de estudio para la reconstrucción de una organización matemática, tiene en cuenta seis momentos de estudio o momentos didácticos: primer momento de estudio o primer encuentro, segundo momento o de exploración, tercer momento o constitución del entorno tecnológico-teórico, cuarto momento de estudio o del trabajo de la técnica, quinto momento o institucionalización, sexto momento o de la evaluación (Chevallard, 1999).

En S4

Peso de objetos	Pesas de 256 kg	Pesas de 64 kg	Pesas de 16 kg	Pesas de 4 kg	Pesas de 1 kg
46			2	3	2
87		1	1	1	3
106		1	2	2	2
158		2	1	3	2
343	1	1	1	1	3

En S5

Peso de objetos	Pesas de 625 kg	Pesas de 125 kg	Pesas de 25 kg	Pesas de 5 kg	Pesas de 1 kg
46			1	4	1
87			3	2	2
106			4	1	1
158		1	1	1	3
343		2	3	3	3

Si solamente se utiliza la primera representación, se observa que las expresiones “de X kg” se repiten en todas las filas, se conjetura que se pueden suprimir con lo que nos quedaría una expresión abreviada (objetivo de la tarea) como sigue:

							Expresión abreviada
46			2 de 16 kg,	3 de 4 kg,	2 de 1 kg,	→	232
87		1 de 64 kg,	1 de 16 kg,	1 de 4 kg,	3 de 1 kg,	→	1113
106		1 de 64 kg,	2 de 16 kg,	2 de 4 kg,	2 de 1 kg,	→	1222
158		2 de 64 kg,	1 de 16 kg,	3 de 4 kg,	2 de 1 kg,	→	2132
343	1 ~~de 256 kg,~~	1 de 64 kg,	1 de 16 kg,	1 de 4 kg,	3 de 1 kg,	→	11113

Lo que se refuerza cuando realizamos las pesadas en S5

						Expresión abreviada
46		1 de 25 kg,	4 de 5 kg,	1 de 1 kg,	→	141
87		3 de 25 kg,	2 de 5 kg,	2 de 1 kg,	→	322
106		4 de 25 kg,	1 de 5 kg,	1 de 1 kg,	→	411
158	1 de 125 kg,	1 de 25 kg,	1 de 5 kg,	3 de 1 kg,	→	1113
343	2 de 125 kg,	3 de 25 kg,	3 de 5 kg,	3 de 1 kg,	→	2333

Desde las tablas la expresión abreviada se obtiene más fácilmente. En S4

Peso de objetos	Pesas de 256 kg	Pesas de 64 kg	Pesas de 16 kg	Pesas de 4 kg	Pesas de 1 kg	Expresión abreviada
46			2	3	2	232
87		1	1	1	3	1113
106		1	2	2	2	1222
158		2	1	3	2	2132
343	1	1	1	1	3	11113

En S5

Peso de objetos	Pesas de 625 kg	Pesas de 125 kg	Pesas de 25 kg	Pesas de 5 kg	Pesas de 1 kg	Expresión abreviada
46			1	4	1	141
87			3	2	2	322
106			4	1	1	411
158		1	1	1	3	1113
343		2	3	3	3	2333

El uso del cero, aparece en el trabajo de esta técnica, en el mismo sentido que en su emergencia histórica: La necesidad de utilizar un símbolo que nos indique ausencia de orden de unidades (en nuestro caso y, por ahora, de un determinado tipo de pesas)

En S4

						Expresión abreviada
198		~~3 de 64 kg,~~	~~0 de 16 kg,~~	~~1 de 4 kg,~~	~~2 de 1 kg,~~	→ 3012
531	~~2 de 256 kg~~	~~0 de 64 kg,~~	~~1 de 16 kg,~~	~~0 de 4 kg,~~	~~3 de 1 kg,~~	→ 20103

Peso de objetos	Pesas de 256 kg	Pesas de 64 kg	Pesas de 16 kg	Pesas de 4 kg	Pesas de 1 kg	Expresión abreviada
198		3	0	1	2	3012
531	2	0	1	0	3	20103

Y en S5

						Expresión abreviada
178		~~1 de 125 kg,~~	~~2 de 25 kg,~~	~~0 de 5 kg,~~	~~3 de 1 kg,~~	→ 1203
679	~~1 de 625 kg~~	~~0 de 125 kg,~~	~~2 de 25 kg,~~	~~0 de 5 kg,~~	~~4 de 1 kg,~~	→ 10204

Peso de objetos	Pesas de 625 kg	Pesas de 125 kg	Pesas de 25 kg	Pesas de 5 kg	Pesas de 1 kg	Expresión abreviada
178		1	2	0	3	1203
343	1	0	2	0	4	10204

Ahora, utilizamos el siguiente sistema de pesas:

S10: 1 kg, 10 kg, 100 kg, 1000 kg, 10.000 kg, ... (se puede continuar añadiendo pesas de mayor valor).

Peso de objetos	Pesas de 10.000 kg	Pesas de 1.000 kg	Pesas de 100 kg	Pesas de 10 kg	Pesas de 1 kg	Expresión abreviada
46				4	6	46
387			3	8	7	387
2.106		2	1	0	6	2106
34.158	3	4	1	5	8	34158

Se observa que la expresión abreviada coincide con la escritura del número. La conclusión es inmediata, llega el momento de la institucionalización

Los números que conocemos “de toda la vida” (base 10) se pueden escribir de otra manera agrupando de 4 en 4, de 5 en 5, y, ¿por qué no? de 6 en 6, de 7 en 7, de 2 en 2, etc.

El número en que se agrupan las unidades se le denomina base del sistema y se escribe como subíndice precedido de un paréntesis. En los números escritos en base diez, no se escrbe la base 10 como subíndice. De esta manera, los resultados anteriores se suelen escribir:

$46 = 231_{(4}$	$46 = 141_{(5}$
$87 = 1.113_{(4}$	$87 = 322_{(5}$
$106 = 1.222_{(4}$	$106 = 411_{(5}$
$158 = 2.132_{(4}$	$158 = 1.113_{(5}$
$343 = 11.113_{(4}$	$343 = 2.333_{(5}$

Al mismo tiempo aparece de manera natural la expresión polinómica de los números anteriores, por ejemplo

$$2.132_{(4} = 2\cdot4^3 + 1\cdot4^2 + 3\cdot4 + 2 = 128 + 16 + 12 + 2 = 158$$

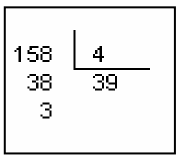
$$1.113_{(5} = 1\cdot5^3 + 1\cdot5^2 + 1\cdot5 + 3 = 125 + 25 + 5 + 3 = 158$$

Con lo cual hemos institucionalizado las técnicas τ_1 y τ_2 y sus tecnologías correspondientes, basadas en los conocimientos que tienen los alumnos sobre la expresión de un número en base 10.

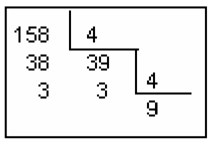
La técnica desarrollada hasta el momento, τ_0 funciona bien con números pequeños. Con números relativamente grandes, es muy costosa, ya que primero habría que determinar la pesa de mayor valor, inmediatamente inferior al peso dado, después la siguiente en orden decreciente, etc.

Conscientes de esta dificultad se propone la modificación de la técnica, razonando de la siguiente manera:

El objetivo es expresar el peso del objeto con el menor número de pesas posible, entonces en S4, si tenemos que expresar un peso de 158 kg se puede proceder así:



158 kg se pueden pesar con 158 pesas de 1 kg, pero cada cuatro pesas de 1 kg equivalen a 1 pesa de 4 kg, entonces, dividiendo 158 entre 4, tenemos, que 158 kg se pueden pesar con 39 pesas de 4 kg y 3 pesas de 1 kg, en total 42 pesas.



42 pesas, aún son muchas pesas. Ahora bien, cada 4 pesas de 4 kg equivalen a 1 pesa de 16 kg, entonces seguimos dividiendo y vemos que los 158 kg se pueden pesar con 9 pesas de 16 kg, 3 pesas de 4 kg y 3 pesas de 1 kg. En total 15 pesas.

Aun podemos seguir reduciendo el número de pesas, ya que 4 pesas de 16 kg equivalen a 1 pesa de 64 kg. En consecuencia seguimos dividiendo y obtenemos que los 158 kg los podemos pesar con 2 pesas de 64 kh, 1 pesa de 16 kg, 3 pesas de 4 kg y 3 pesas de 1 kg. En total 9 pesas que es el menor número de pesas con el que se pueden pesar 158 kg en el sistema S4.

$$\begin{array}{llll} 158 & \underline{|\ 4} & & \\ 38 & 39 & \underline{|\ 4} & \\ 3 & 3 & 9 & \underline{|\ 4} \\ & & 1 & 2 \end{array}$$

En resumen tenemos: $158 = 2133_{(4}$

Con lo que hemos reconstruido la técnica τ_3, que, al principio se puede formular así:

> $\tau_{3.1}$. Para expresar un número escrito en base 10, en otra base cualquiera se divide el número entre la base, después el cociente entre la base y, así sucesivamente, hasta obtener un cociente inferior a la base. Entonces este cociente y los restos obtenidos forman la expresión del número en dicha base.

Y en el momento de la institucionalización se reformula en τ_3

Después de varias actividades relativas al trabajo de la técnica surge la siguiente cuestión:

> Q2. ¿Aplicando esta técnica se puede expresar un número en cualquier base, incluso mayor que 10?

En el momento de estudio del alcance de la técnica $\tau_{3.1}$ se puede proponer la siguiente tarea:

> T. Expresar un número en una base superior a 10

Que podemos particularizar en la subtarea *"Expresar los números 20, 23 y 34 en base 12"*

$$\begin{array}{ll} 20 & \underline{|\ 12} \\ 8 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 23 & \underline{|\ 12} \\ 11 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 34 & \underline{|\ 12} \\ 10 & 2 \end{array}$$

$20 = 18_{(12} = 1x12 + 8 = 20$

$23 = 111_{(12} = 1x12^2 + 1x12 + 1 = 157$ ¡¡¡ error !!!

$34 = 210_{(12} = 2x12^2 + 1x12 + 0 = 300$ ¡¡¡ error !!!

Aquí aparece la potencia de la cuestión generatriz. Para expresar 20 en el sistema S12 (1 kg, 12 kg, 12^2 kg, ….) se utiliza 1 pesa de 12 kg y 8 pesas de 1 kg, es decir $18_{(12}$, pero 23 en S12 es 1 pesa de 12 y 11 de 1, es decir 111_{12}, pero hemos visto que este número representa al 157, se podría escribir $1(11)_{(12}$. Igual ocurre con 34 que equivale a 2 pesas de 12 kg y 10 de 1 kg, pero $110_{(12}$ equivale a 300, se podría escribir $2(10)_{(12}$.

En lugar de escribir (10) u (11) para las unidades (pesas de 1 kg) se pueden "inventar" unos símbolos especiales para (10) y (11). Podemos exigir a estos símbolos dos cualidades:

a) Que sean fáciles de escribir y de reconocer y

b) Que guarden un cierto orden

Que mejores símbolos que las letras mayúsculas del abecedario. Es decir "A" para el 10 y "B" para el 11.

En la institucionalización podemos establecer que los dígitos utilizados en una base solamente son los inmediatamente inferiores a la base, así en base cinco se utilizan los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4. No se utiliza el 5 porque 5 se escribe $10_{(5}$, ni 6 porque 6 se escribe $11_{(5}$, etc. Si la base es superior a 10, para los números comprendidos entre 9 y la base se utilizan cono dígitos las letras mayúsculas del abecedario. Así para la base 16 se utilizarían o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Donde A representa a 10, B representa a 11, C representa a 12, D representa a 13, E representa a 14 y F representa a 15.

La cuestión generatriz es de gran utilidad cuando surgen dudas sobre la expresión de un número en una determinada base, por ejemplo, ¿porqué 18 se escribe $24_{(7}$? En esta pregunta se puede argumentar que el sistema de pesas sería S7: 1 kg, 7 kg, 7^2 kg, … 18 kg se pesarían con dos pesas de 7 kg y 4 pesas de 1 kg, es decir, $24_{(7}$. Otra pregunta: ¿porqué 14 = $12_{(12}$? En este caso el sistema de pesas es S12: 1 kg, 12 kg, 144 kg, ... 14 kg se pesarían con una pesa de 12 kg y 2 pesas de 1 kg, es decir, $12_{(12} = 14$

Llegados a este punto se puede formular la siguiente cuestión:

Q3. ¿Cómo se escribe y se lee la secuencia numérica en las distintas bases de los sistemas posicionales?

La primera técnica que aparece es escribir la secuencia numérica en base 10 y después pasarla a otra base, distinta de la 10.

Con el trabajo de la técnica aparece la que consiste en ir añadiendo unidad a unidad, cuando en un orden de unidades se llega al valor de la base *n* se escribe en este orden un 0 y se añade una unidad al orden inmediatamente superior (ya que *n* pesas de un orden equivalen a 1 pesa de orden inmediatamente superior).

3.1. LECTURA DE NÚMEROS EN CUALQUIER BASE

Los estudiantes conocen la lectura de números en base 10. El profesor debe dar indicaciones para que surjan técnicas para nombrar números en bases distintas a la 10. Estas indicaciones pueden ser la observación de los principios aditivo y multiplicativo y de las palabras que utiliza el sistema decimal (Chamorro, 2004); la composición, descomposición y evolución por abreviaturas y contracciones de las palabras en el idioma castellano[6]. Así, cuando enunciamos la secuencia numérica en base diez decimos: …), …

0 (cero),
1 (uno),
2 (dos),
…
9 (nueve),
10 (diez),
11 (once –diez y uno),
12 (doce – diez y dos-),
13 (trece – diez y tres-),
14 (catorce – diez y cuatro-),
15 (quince – diez y cinco-),
16 (dieciséis – diez y seis-),
17 diecisiete - diez y siete-),
18 (dieciocho – diez y ocho-),
19 (diecinueve – diez y nueve-),
20 (veinte – dos veces diez-),
21 (veintiuno –dos veces diez y uno),
22 (veintidós – dos veces diez y dos)
…
29 (veintinueve -dos veces diez y nueve-)
30 (treinta -tres veces diez-),
31 (treinta y uno – tres veces diez y uno-)
32 (treinta y dos – tres veces diez y dos)

Donde he descompuesto algunas palabras.

Entonces aparecen modos de enunciar la secuencia numérica en otras bases, como, por ejemplo en base 5. La técnica utilizada es la utilización de los principios aditivo y multiplicativo hasta el segundo orden de unidades.

$0_{(5}$ (cero),
$1_{(5}$ (uno),
$2_{(5}$ (dos),
$3_{(5}$ (tres),
$4_{(5}$ (cuatro)
$10_{(5}$ (cinco)[8],
$11_{(5}$ (cinco y uno)[9],
$12_{(5}$ (cinco y dos),
$13_{(5}$ (cinco y tres),
$14_{(5}$ (cinco y cuatro),
$20_{(5}$ (dos veces cinco)[7],
$21_{(5}$ (dos veces cinco y una),
$22_{(5}$ (dos veces cinco y dos),
$23_{(5}$ (dos veces cinco y tres),
$24_{(5}$ (dos veces cinco y cuatro)
$30_{(5}$ (tres veces cinco) [10],
$31_{(5}$ (tres veces y una),
$32_{(5}$ (tres veces cinco y dos),
$33_{(5}$ (tres veces cinco y tres),
$34_{(5}$ (tres veces cinco y cuatro),
$40_{(5}$ (cuatro veces cinco),
$41_{(5}$ (cuatro veces cinco y una),
$42_{(5}$ (cuatro veces cinco y dos),
$43_{(5}$ (cuatro veces cinco y tres),
$44_{(5}$ (cuatro veces cinco y cuatro),
$100_{(5}$ (cinco veces cinco)

Este modo de "nombrar" los números de la secuencia numérica en una base, sirve como tecnología para realizar las operaciones fundamentales en cualquier base con las técnicas usuales, utilizaremos un ejemplo para especificarlo:

3.2. OPERACIONES ELEMENTALES EN BASES DISTINTAS A LA BASE 10

Se supone que los estudiantes conocen perfectamente los algoritmos usuales de las cuatro operaciones fundamentales en base 10. En esta sección se desarrolla una extensión de ellos a cualquier base. Las técnicas y tecnologías utilizadas son las que se utilizan en base 10 y se describen simultáneamente con el proceso de estudio. Utilizaremos el trabajo realizado hasta ahora par extender dichas operaciones a base cualquiera, lo ejemplificaré en la base 5, 6, 7 y 8

[6] La lectura es aconsejada porque facilita la realización de las operaciones elementales en cualquier base
[7] Al añadir una a cinco y cuatro tendríamos cinco y cinco, es decir, dos veces cinco.
[8] Retomando la cuestión generatriz es "una pesa de 5 kg y cero de 1 kg"
[9] Retomando la cuestión generatriz es "una pesa de 5 kg y una de 1 kg"
[10] Al añadir una a dos veces cinco y cuatro tenemos dos veces cinco y cinco, es decir, tres veces cinco.

<u>Adición</u>: $2304_{(5} + 1243_{(5} =$

Unidades de primer orden: 4 + 3 = 7; 7 son cinco y dos, es decir, $12_{(5}$ (una pesa de 5 kg y 2 pesas de un kg); escribo 2 en el primer orden de las unidades de la suma, llevo 1 que la sumo a las unidades de segundo orden. Unidades de segundo orden: 1 (la que llevo) + 0 + 4 = 5; 5 = $10_{(5}$ (un pesa de cinco kg y cero de 1); escribo 0 en las unidades de segundo orden de la suma y llevo 1 que la sumo a las unidades de tercer orden. Unidades de tercer orden: 1 (la que llevo) + 3 + 2 = 6; 6 son cinco y una, es decir $11_{(5}$ (una pesa de cinco kg y otra de 1), escribo 1 en las unidades de tercer orden de la suma y llevo 1 que la sumo a las unidades de cuarto orden. Unidades de cuarto orden: 1 (la que llevo) + 2 + 1 = 4.

2^1	3^1	0^1	$4_{(5}$	+
1	2	4	$3_{(5}$	=
4	1	0	$2_{(5}$	

<u>Sustracción</u> (algoritmo “pedir y pagar”): $4201_{(6} - 1324_{(6} =$

Unidades de primer orden: a 0 no se puede restar 5, tomo $10_{(6}$ (seis, 1 pesa de 6 kg y cero de 1) que son 6 elementos, 6 menos 5, 1, escribo 1 en las unidades de primer orden de la diferencia y llevo 1, que la sumo a las unidades de segundo orden del sustraendo, 3 + 1 (que llevo) = 4. Unidades de segundo orden: a 2 no se le puede restar 4, tomo $12_{(6}$ (seis y dos, una pesa de 6 kg y dos pesas de 1 kg) que son 8, 8 – 4 = 4, escribo 4 y llevo 1, que la sumo a las unidades de tercer orden del sustraendo, 1 + 4 = 5. Unidades de tercer orden: a 1 no le puedo restar 5, tomo $11_{(6}$ (seis y una, una pesa de 6 kg y una pesa de 1 kg) que son 7 elementos, 7 – 5 = 2, escribo 2 en el tercer orden de la diferencia y llevo 1 que la sumo a las unidades de cuarto orden del sustraendo, 1 + 1 = 2. Unidades de cuarto orden: 5 – 2 = 3, escribo tres en las unidades de cuarto orden de la diferencia.

5	1	2	$0_{(6}$	-
1_1	4_1	3_1	$5_{(6}$	=
3	2	4	$1_{(6}$	

<u>Multiplicación</u>: $6503_{(7} \times 56_{(7} =$

Multiplicando ($6503_{(7}$) por las unidades de primer orden del multiplicador ($6_{(7}$): 6 x 3 = 18 = $24_{(5}$ (dos veces siete y cuatro, dos pesas de 7 kg y cuatro pesas de 1 kg), escribo 4, en el orden de unidades del primer producto parcial, y llevo 2. 6 x 0 = 0 y 2 que llevo, 2, escribo 2 en las unidades de segundo orden del primer producto parcial, no hay llevada. 6 x 5 = 30 = $42_{(7}$ (cuatro veces siete y dos, cuatro pesas de 7 kg y dos pesas de 1 kg), escribo 2 en las unidades de tercer orden del primer producto parcial y llevo 4. 6 x 6 = 36 y 4 que llevo 40 = $55_{(7}$ (cinco veces siete y cinco), escribo 5 en las unidades de cuarto orden del primer producto parcial y 5 en las unidades de quinto orden.

		6	5	0	$3_{(7}$	-
				5	$6_{(7}$	=
	5	5	2	2	4	
4	5	4	2	1		
5	4	2	4	3	$4_{(7}$	

Multiplicando ($6503_{(7}$) por las unidades de segundo orden del multiplicador, 5, ($50_{(7}$): 5 x 3 = 15 = $21_{(7}$ (dos veces siete y una), escribo 1 en las unidades de segundo orden del segundo producto parcial (ya que estamos multiplicando las unidades de segundo orden del multiplicador) y llevo 2. 5 x 0 = 0 y 2 que llevo 2, escribo 2 en las unidades de tercer orden del segundo producto parcial, no hay llevada. 5 x 5 = 25 = $34_{(7}$ (tres veces siete y cuatro), escribo 4 en las unidades de cuarto orden del segundo producto parcial y lleco 3. 5 x 6 = 30 y 3 que llevo 33 = $45_{(7}$ (cuatro veces siete y cinco), escribo 5 en las unidades de quinto orden del segundo producto parcial y 4 en las unidades de sexto orden. Finalmente se suman los dos producto parciales, obteniendo el producto: $542434_{(7}$.

<u>División</u>: $24146_{(8} : 7_{(8} =$

$$
\begin{array}{rrrrrl|l}
 & 2 & 4 & 1 & 4 & 6_{(8} & 7_{(8} \\
\cline{7-7}
- & 1 & 6 & & & & 2\ \ 7\ \ 0\ \ 5_{(8} \\
\cline{2-3}
 & 0 & 6 & 1 & & & \\
 & - & 6 & 1 & & & \\
\cline{3-4}
 & & 0 & 0 & 4 & 6 & \\
 & & & - & 4 & 3 & \\
\cline{4-6}
 & & & & 0 & 3 & \\
\end{array}
$$

$2_{(8}$ unidades de quinto orden no se pueden dividir entre $7_{(8}$, las convertimos en unidades de cuarto orden, $20_{(8}$ y $4_{(8}$ unidad de cuarto orden que hay en el dividendo, tenemos $24_{(8}$ unidades de cuarto orden, $24_{(8}$ (dos veces ocho y cuatro) equivale a 20 elementos, 20 entre 7 tocan a 2 (escribimos $2_{(8}$ unidades de cuarto orden en el cociente), 2 x 7 = 14 = $16_{(8}$ unidades de cuarto orden, las restamos de las $24_{(8}$ unidades de cuarto orden que teníamos y nos quedan $6_{(8}$ unidades de cuarto orden que las convertimos en $60_{(8}$ unidades de tercer orden y $1_{(8}$ unidad de tercer orden (bajamos el uno), tenemos $61_{(8}$ unidades de tercer orden. $61_{(8}$ = 49, 49 entre 7 a 7, escribimos 7 en las unidades de tercer orden del cociente, 7 x 7 = 49 = $61_{(8}$, unidades de tercer orden que restamos de las $61_{(8}$ unidades de tercer orden que teníamos, nos da cero. Bajamos el 4 (cuatro unidades de segundo orden); 4 unidades de segundo orden no se pueden dividir entre 7, escribimos 0 (cero) en las unidades de segundo orden del cociente. Las cuatro unidades de segundo orden se convierten en $40_{(8}$ de primer orden y las 6 que hay en el dividendo, tenemos $46_{(8}$ unidades de primer orden, que equivalen a 38 elementos, 38 entre 7 tocan a 5, 5 x 7 = 35 = $43_{(8}$, que resto de las $46_{(8}$ unidades de primer orden que tenía, resultando un resto de $3_{(8}$.

3.3. MULTIPLICACIÓN EGIPCIA

El objetivo d) que enunciamos al principio era la aplicación de los conocimientos adquiridos para justificar algunos algoritmos, distintos de los usuales, de las operaciones fundamentales, que suelen ser objeto de estudio en la formación matemática y didáctica de los futuros maestros en las universidades españolas. A título de ejemplo, vamos a estudiar el algoritmo egipcio de la multiplicación. El proceso de estudio se suele realizar mostrando a los alumnos la técnica que comprenden este algoritmo y se les suele pedir que la justifiquen, es decir, que expliciten la tecnología asociada a esa técnica. Dicha técnica es la siguiente:

τ_4 Algoritmo egipcio de la multiplicación: La multiplicación egipcia se realiza en dos columnas. En la primera fila escribimos un 1 y uno de los factores. En las filas sucesivas, se van duplicando estos números hasta que en la columna del 1 obtengamos el número más cercano al otro factor, pero que no lo sobrepase. Entonces tomamos los números de la columna del 1 necesarios para sumar un valor igual al otro factor, la suma de los números correspondientes en la otra columna es el producto buscado.

Veamos un ejemplo: 27 x 78.

*1	78
*2	156
~~4~~	~~312~~
*8	624
*16	1.248
27	2.106

Escribimos dos columnas que comenzamos por el 1 y 78. Doblamos las filas, cuando llegamos a 16, no volvemos a doblar porque el doble de 16 es 32 y sobrepasaría a 27 (el otro factor). Marcamos con un * los números necesarios para sumar 27, es decir, 1, 2, 8, 16, tachamos en las dos columnas los no seleccionados. Sumamos en la otra columna los números correspondientes a los seleccionados en la primera columna. El resultado 78 + 156 + 624 + 1.248 = 2.106 = 27 x 78 es el producto buscado.

La tecnología asociada, esta basada en lo estudiado anteriormente:

resultando 2.106 = 78 + 156 + 624 + 1.248 = (1 + 2 + 8 + 16) x 78 =

= ($11011_{(2}$) x 78 = 27x78, es decir, hemos expresado el multiplicando, 27, en base 2.

La existencia y la unicidad de la expresión de cualquier número en base 2, garantiza la corrección de la técnica.

4. CONCLUSIONES

En el presente trabajo hemos reconstruido una praxeología local relativa al estudio de la escritura de números expresados en cualquier base del sistema posicional y a su uso en la realización de las operaciones fundamentales, de acuerdo con los supuestos teóricos de la TAD, que han resultado muy adecuados para el trabajo pretendido. Esta praxeología pede facilitar el estudio de los sistemas de numeración posicionales.

En el proceso de estudio se muestra como partiendo de una situación fundamental, de una cuestión generatriz, los estudiantes, bajo la dirección del profesor, reconstruyen la praxeología pretendida, donde las técnicas y tecnologías van surgiendo conforme se avanza en el trabajo matemático, por la modificación y adaptación de las que se disponen hasta ese momento. También se han descrito algunas estrategias docentes que puede establecer el profesor para desarrollar con éxito el proceso de estudio.

Esta praxeología local se puede se puede desarrollar por ampliaciones sucesivas hasta alcanzar el sector de “Sistemas Numéricos” (Aritmética) del programa de formación de Matemáticas y su Didáctica de la Titulación de Maestro de las universidades españolas e integrarla con las otras Áreas que componen el programa de estudios.

Otra ampliación de este trabajo sería la evaluación del proceso de estudio y establecer, en su caso, las propuestas de mejora.

5. REFERENCIAS

Chamorro, M. C. (2004). A la búsqueda de la numeración. De la filogénesis a la ontogénesis: Aspectos didácticos e históricos. En M. C. Chamorro (Ed.). *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño,* (pp. 95-121). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia. Secretaría General Técnica.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19, 2, pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'etude. 3. Ecologie & Regulation. En J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigues, M. Berthrlot, R. Floris (Ed.). *Actes de la 11e École d'Été de didactique des Mathematiques* (Version electronique du CEDEROM d'accompagnement). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y.; Bosch, M. y Gascón, J. (11997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Barcelona: Horsori.

Sierra, T. A. y Gascón, J. (2003). Reconstrucción escolar de la numeración. De la representación de los números a la simplificación de los algoritmos. *XIX Jornadas del SIIDM*, Córdoba, 2003