DE L'USAGE DE LA TAD POUR L'ANALYSE DES ERREURS

Ai Quoc Nguyen, Hamid Chaachoua, Claude Comiti
Laboratoire Leibniz, Grenoble

Summary
In our paper, we are interesting in the knowledge object O : *Quadratic equation,* and in the type of tasks T : *Solving a quadratic equation.*
Our study is a comparative one between two institutions: the course 9 in Vietnam and the course 10 in France. We will show how an analysis of mathematics teaching and learning activities in terms of praxeologies, within the theoretical framework of the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard 1991), allows modelling student practices and caracterising their personal rapport to O in the two institutions, conjointly in terms of techniques used to solve T and of errors made in solving T.

Resumen
En nuestra presentación, nos interesaremos por el objeto de saber O: *Ecuación del segundo grado* y por el tipo de tareas T: *Resolver una ecuación de segundo grado,* en dos instituciones "clase 9 en Vietnam" y "clase de secundaria en Francia".
Mostraremos como un análisis en término de praxeologías permite modelizar la relación institucional al objeto O en estas dos instituciones, y también de caracterizar la relación personal de los alumnos a partir de:
- el estudio de las técnicas que los alumnos utilizan para resolver T,
- el análisis de errores que los alumnos cometen en términos ya sea de la calidad (validez, adecuación) de la técnica utilizada, ya sea de la falta de control de las técnicas indispensables para la resolución de algunas subtareas encontradas en la ejecución de una técnica adecuada.

Introduction

La communication présentée est liée aux travaux en cours de doctorat en cotutelle[1] en didactique des mathématiques de Nguyen Ai Quoc, thèse intitulée : « La résolution des équations du second degré en France et au Viêt-nam : apports d'un outil informatique pour l'analyse praxéologique ».

L'objet de la thèse est l'étude du rôle des contraintes institutionnelles et des choix effectués dans les programmes et manuels scolaires de deux pays (la France et le Viêt-nam) sur les pratiques des élèves de fin de collège et de début de lycée dans le cas de la résolution des équations du second degré.

Dans cette communication, nous montrerons l'intérêt d'une analyse en terme de praxéologies pour caractériser le rapport institutionnel en position d'élève à partir de l'étude des techniques qu'ils mettent en œuvre pour résoudre algébriquement une équation du second degré et de l'analyse des erreurs qu'ils commettent. Nous montrerons également les apports du logiciel APLUSIX (Nicaud J.F.et al. 2004) pour le recueil et l'analyse des productions des élèves.

Nous nous appuierons sur l'étude de deux institutions : classes 8 et 9 au Viêt-nam (qui correspondent aux classes de quatrième et troisième en France) et classe de seconde en France (qui correspond à la classe 10 au Viêt-nam)[2].

[1] Dirigée en France par Hamid Chaachoua, au Viêt-nam, par Lê Thi Hoai Châu.
[2] Ces choix seront justifiés ci-dessous.

I – Résumé des résultats de l'analyse comparative des programmes et manuels

En France, comme au Vietnam, l'algèbre joue un rôle important dans l'enseignement des mathématiques au collège et en début de lycée. Cependant les choix d'enseignement de l'algèbre présentent des différences importantes.

Pour pouvoir comprendre les pratiques des élèves dans la résolution des équations du second degré dans les deux systèmes d'enseignement, Nguyen A.Q. a analysé les rapports institutionnels au calcul algébrique et à la résolution des équations du second degré dans chacune des institutions étudiées.

C'est dans le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992) qu'il caractérise ces rapports institutionnels, à partir d'une part d'une analyse comparative des programmes, d'autre part d'une analyse praxéologique des manuels.

Voici un extrait de sa communication au Premier Séminaire Franco-Vietnamien de Didactique des Mathématiques (Nguyen, 2005).

« Deux choix institutionnels différents.
L'analyse comparative des programmes et des manuels de mathématiques (au collège et en seconde) dans les deux institutions nous permet de déterminer les attentes de chacune de ces institutions : c'est une partie du rapport institutionnel. Elle nous est de plus indispensable, sur le plan méthodologique, pour déterminer avec précision l'objet pertinent pour une étude comparative, ainsi que le niveau de classe dans lequel il sera approprié de conduire cette étude. » (Nguyen A.Q., 2005)

Il résume ensuite comme suit les principales différences entre les choix effectués dans chacun des deux pays (cf tableau comparatif des programmes en annexe).

« - En France, l'accent est mis au collège sur le calcul littéral et sur les équations du premier degré vues comme outil de résolution de problèmes. Les programmes du cycle central ($5^{ième}$ et $4^{ième}$) organisent une progressivité des apprentissages, aussi bien en calcul littéral que dans l'approche des notions d'équations et d'identité. Ces apprentissages s'appuient sur la résolution de nombreux problèmes, laquelle nécessite l'emploi de lettres pour désigner des inconnues, des indéterminées ou des variables. Une équation est définie par l'égalité de deux expressions algébriques dont la résolution consiste à déterminer la valeur de la lettre (l'inconnue) pour que l'égalité soit vraie.
- Au Viêt-nam, la notion d'équation est introduite en classe 8 après l'étude des polynômes et des opérations sur les polynômes, via la résolution d'équation A(x)=B(x). Une équation est une égalité entre deux polynômes à une variable, la résolution de cette équation consistant à chercher la valeur de cette variable pour que ces polynômes prennent la même valeur numérique. » (ibidem) .

En ce qui concerne la résolution des équations et inéquations du second degré :
- En France, elle apparaît en seconde, où elle est ramenée par la factorisation à la résolution d'équations du premier degré (la résolution algébrique avec calcul du discriminant de l'équation du second degré étant au programme de la classe de première seulement). Pour un même problème, il y a une combinaison des apports des modes de résolution graphique et algébrique. Il existe des problèmes conduisant à une équation qu'on ne sait pas résoudre algébriquement et dont on cherche des solutions approchées.
- Au Viêt-nam, dès la classe 9, la résolution d'équations et d'inéquations du second degré s'appuie sur l'utilisation des formules : la résolution de l'équation $ax^2+bx+c=0$ est faite en utilisant le discriminant, la résolution d'inéquation $ax^2+bx+c > 0$, par l'étude de signe du

trinôme $f(x)=ax^2+bx+c$. De plus, équations et inéquations paramétrées jouent un rôle important dans le programme vietnamien.

L'analyse des manuels (Fractal seconde pour la France, manuels officiels de collège pour le Viêt-nam) lui permet de constater que, pour l'étude des équations du premier et du second degré :
« la résolution de problèmes se ramenant à la résolution d'une équation représente quasiment la moitié des exercices proposés en seconde (48,7%) versus le quart (25,4%) en classes 8 et 9 ; la résolution d'une équation écrite sous forme $P_2(x)=P'_2(x)$[3] se ramenant au produit de deux équations du premier degré par factorisation, représente en seconde 48% des exercices proposés versus 34,6% en classes 8et 9 ; la résolution algébrique des équations du second degré à l'aide du discriminant, présente en classe 9 (23% des exercices) est totalement absente en seconde. » (ibidem).

Ces analyses le conduisent à restreindre l'objet de son étude à la résolution algébrique des équations du second degré se présentant sous forme d'équation – produit, ou pouvant se ramener par factorisation à cette forme-là, et à choisir de travailler en seconde et première en France et en classes 9 et 10 au Viêt-nam.

Nous ne nous intéresserons ici qu'aux résultats des classes de seconde en France (2F) et des classes 9 au Viêt-nam avant introduction du discriminant (9VN).

II – Choix des exercices proposés aux élèves

II.1 Analyse a priori

L'analyse a priori effectuée part du bloc technologico-théorique (mis en évidence lors de l'analyse praxéologique des manuels) qui permet d'engendrer les techniques τ pour le type de tache T : « résoudre une équation de degré 2 de la forme : $P_2(x)=P'_2(x)$ ».
Trois blocs technologico-théoriques ont été mis en évidence, lors de l'étude des manuels de seconde (F) et de collège (classes 8 et 9 VN) :

en France seconde *(θ_1, Θ_1)*
Éléments technologiques : les « Règles du calcul algébrique » dans l'ensemble R, en particulier la propriété de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans l'ensemble R et les identités remarquables, ainsi que la propriété de la multiplication dans R : « $A\times B=0$ équivaut à : $A=0$ ou $B=0$ » .
Théorie sous-jacente : (R,+, .) est un anneau factoriel dans lequel tout élément non nul possède une décomposition unique en facteurs irréductibles et qui ne possède pas de diviseur de zéro, tout élément non nul de R étant régulier pour la multiplication.

au VN classe 8 *: (θ_2.1, Θ_2)*
Éléments technologiques : propriétés de la "Multiplication et division des polynômes", les règles de « Factorisation d'un polynôme », la propriété de la multiplication dans R : « $A\times B=0$ équivaut à : $A=0$ ou $B=0$ » et la propriété dans l'ensemble R[X] des polynômes à coefficient dans R : « $A(x)B(x) = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$. »
Théorie sous-jacente : dans R[X], anneau factoriel, commutatif, unitaire et intègre, tout polynôme du second degré ax^2+bx+c avec $b^2-4ac\geq 0$ possède une décomposition unique en deux facteurs irréductibles (polynômes du premier degré) et tout polynôme du premier degré et tout polynôme ax^2+bx+c avec $b^2-4ac<0$ sont irréductibles.

au VN classe 9 *(θ_2.2, Θ_2)*
Nouveaux éléments technologiques dans la même théorie ***(Θ_2)***

[3] Où est une expression algébrique de degré 2

Mise sous formule canonique $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$, où $\Delta=b^2-4ac$.

Et calcul algébrique des solutions selon le signe du discriminant :

Les deux premiers blocs technologico-théoriques permettent d'engendrer la technique **GFact** (G comme Générale, et Fact comme Factorisation) et ses variantes décrites ci-dessous.

Technique	Description
Gfact	Variante 1 - transformer l'équation sous forme $Q_2(x)=0$ (*sous-tâche : regroupement*) - factoriser $Q_2(x)$ sous la forme $R_1(x)\ S_1(x)=0$ (*sous-tâche : factorisation*) - résoudre l'équation produit $R_1(x)\ S_1(x)=0$ (*sous-tâche : équation produit*)
	Variante 2 - factoriser $P_2(x)$ sous la forme $R_1(x)\ S_1(x)$ et $P'_2(x)$ sous la forme $R'_1(x)\ S'_1(x)$ (*sous-tâche : factorisation)* - transformer l'équation sous forme $Q_2(x)=0$ (i.e. $R_1(x)\ S_1(x)- R'_1(x)\ S'_1(x) =0$) (*sous-tâche : regroupement*) - factoriser $Q_2(x)$ sous la forme $R''_1(x)\ S''_1(x)=0$ (*sous-tâche : factorisation*) - résoudre l'équation produit $R''_1(x)\ S''_1(x)=0$ (so*us-tâche EP : équation produit*)

Le troisième permet d'engendrer la technique **GDév** (G comme générale, et Dév comme développement) et ses variantes.

Gdév	Variante 1 - développer $P_2(x)$ et $P'_2(x)$ (*sous-tâche : Développement*) - transformer l'équation sous forme $Q_2(x)=0$ (*sous-tâche : regroupement*) - réduire $Q_2(x)$ (so*us-tâche : réduction*) - résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ (*sous-tâche : équation canonique de degré 2*)
	Variante 2 - transformer l'équation sous forme $Q_2(x)=0$ (*sous-tâche : regroupement*) - développer Q_2 (*sous-tâche : Développement*) - réduire $Q_2(x)$ (*sous-tâche : réduction*) - résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ (*sous-tâche EC : équation canonique de degré 2*)

Techniques associées à des sous-tâches ou à des tâches particulières

A chaque sous-tâche correspondent des techniques. Par exemple,

- Pour la sous-tâche "équation-produit", la technique ProdN (cf. ci-dessous) s'appuie sur l'élément technologique qui permet de transformer cette équation en deux équations de degré 1 : $P(x)Q(x)=0$ ssi $P(x)=0$ ou $Q(x)=0$)
- Pour la sous-tâche "équation canonique", deux techniques dont prévisibles. La première utilise la factorisation, la deuxième, le discriminant.

D'autres techniques peuvent être envisagées selon le type de l'équation. Il peut y avoir aussi, des techniques *non adéquates* pour la résolution en cours qui peuvent être utilisées par les élèves.

Nous notons comme suit les techniques attendues :
ProdN (ProdN comme produit nul) pour résoudre $P_1(x)\ Q_1(x)=0$
CarN (CarN comme carré nul) pour résoudre $P_1^2(x) =0$

Rac (Rac comme racine carrée) pour résoudre $R_1^2(x) = S_1^2(x)$
IdR (IdR comme Identité Remarquable) pour résoudre $R_1^2(x) = S_1^2(x)$ ou $ax^2 + bx + c = 0$
Simp (Simp comme simplification) pour résoudre $R_1(x)\ S_1(x)= R_1(x)\ S'_1(x)$

Dans le cas général, on peut avoir une combinaison de ces techniques.

Par exemple, pour l'équation $P_2(x)=P'_2(x)$, un élève peut factoriser $P_2(x)$ sous la forme $R_1(x)\ S_1(x)$ et $P'_2(x)$ sous la forme $R'_1(x)\ S'_1(x)$ (sous-tâche : factorisation), et ensuite si $R_1(x)= R'_1(x)$, simplifier par ce facteur. Dans cet exemple, nous sommes dans une technique de factorisation suivie d'une technique de simplification. On la notera : **Gfact_ Simp**.

II.2 Exercices retenus

1. Type T1 : P×Q = 0 ou (ax+b)(cx+d)=0

Variables de la tâche : forme de l'expression du premier membre de l'équation : P=Q ou P≠Q.
Exercices retenus
ex1: $(-2x+5)^2 = 0$; ex2 :$(-5x +1)(3x – 7) = 0$

Type T2 : P×Q + P×R = 0

Variables de la tâche : présence ou non du polynôme unité : R=1 ou R≠1, position des deux termes par rapport au signe de l'égalité : P×Q + P×R = 0 ou Q×P = P×R.
Exercices retenus
ex3 : $(3 – x)(x+2) + x + 2 = 0$; ex4 : $(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3) = 0$
ex5 : $(-2x + 1)(-5x – 4) = (-5x – 4)(x – 1)$

Type T3: P×Q + R×S= 0 où P est un multiple de R ou R est un multiple de P.

Variables de la tâche : présence ou non d'un polynôme unitaire : S = 1 ou Q = 1, position de deux termes par rapport au signe d'égalité : P×Q + R×S= 0 ou P×Q = R×S, valeur positive ou négative du multiple k.
Exercices retenus
ex6 : $(2x + 1)(3x – 6) + x – 2 = 0$; ex7 : $(-x + 4)(-2x + 3) – (x – 5)(-6 + 4x) = 0$
ex8 : $(6x + 3)(1 – 3x) = (2x + 1)(-x – 4)$; ex9 : $(-4x + 3)(3x-9) + (4x – 3)(x – 8) = 0$

Type T4: P×Q + R×S= 0

Équations de formes suivantes : différence de deux carrés ou autre identité remarquable
Variables de la tâche : position de deux carrés par rapport au signe d'égalité, présence ou non d'une constante $k^2 \neq 1$ devant un carré, présence ou non d'une constante au lieu d'un carré, présence ou non du signe moins devant le coefficient a^2.
Exercices retenus
ex10 : $(-4x + 5)^2 = (-2x – 7)^2$; ex11 : $(3x – 4)^2 – (- 5x + 1)^2 = 0$
ex12 : $x^2 = 7$; ex13 : $– (-3x – 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$
ex14 : $- (2x – 1)^2 + 9(-x + 2)^2 = 0$; ex15 : $x^2 + 8x + 16 = 0$; ex16 : $25x^2 – 90x + 81 = 0$

Type T5 : P×Q+R×S=0

Équations se ramenant à la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ et vérifiant la contrainte suivante : aucune factorisation partielle n'est possible et le premier membre ne se réduit pas à une identité remarquable après développement.
Exercices retenus :
ex17 : $2x^2 + 5x - 7 = 0$ et ex18 : $x^2 – 11x + 24 = 0$

III –Analyse des productions des élèves

Rappelons que nous nous bornons ici à l'étude des deux institutions 2F et 9VN avant introduction du discriminant.

III.1 Recueil des productions

Nous avons choisi de travailler sur un micro-monde de l'algèbre : APLUSIX. Ce logiciel permet notamment d'enregistrer tout le travail de l'élève, ce qui constitue une base de données pour le chercheur. Ainsi, il donne accès à la composante privée du travail de l'élève. En particulier, on peut déterminer les hésitations dans la résolution, les retours en arrière, le temps d'arrêt entre les actions. Nous utilisons ici ces informations, d'une part pour identifier les techniques utilisées par les élèves et savoir si elles sont routinières ou non, d'autre part pour pointer les différentes erreurs commises dans la mise en œuvre de ces techniques[4].

III.2 Analyse des techniques mises en œuvre

L'objet de notre communication étant centré sur l'analyse des erreurs, nous nous bornerons ici à donner des résultats synthétiques.

Pour la simplification de l'analyse, nous avons, dans un premier temps, négligé les techniques jamais mises en œuvre par les élèves vietnamiens et très rarement mises en œuvre par les élèves français : Fact_Dev, Simp_ProdN, Fact_IdR_ProdN (cf tableau comparatif des techniques en annexe III).

Nous avons de plus regroupé les techniques les plus fréquemment rencontrées selon la classification suivante :
τ GDéveloppement (Dév, Dév_Rac, IdR_Dev,),
τ GFactorisation (Fact, IdR, Fact_ProdN, IdR_ProdN, IdR_CarN),
τ Règles (ProdN, CarN, Rac, Simp),
τ Mixtes (Dev_Fact_ProdN, Dev_IsV), IsV étant la notation donnée à la technique (non prévue a priori) consistant à isoler dans le premier membre les termes en x en laissant au second membre le terme constant.

Tableau 1 : Principales techniques mises en œuvre

	Seconde F				**classe9 VN**			
%	Total	R	E	NT	Total	R	E	NT
GDéveloppement	9,3	0,0	58,5	41,5	24,7	0,9	77,6	21,5
GFactorisation	66,0	54,5	37,6	7,9	36,6	31,4	67,9	0.6
Règles	20,0	50,6	43,7	6,9	9,9	20,9	79,1	0,0
Mixte	2,5	0,0	27,3	72,7	28,8	10,4	88,8	0,8

Ce tableau représente le pourcentage des groupes de techniques mises en œuvre par les élèves.

[4] Nous travaillerons par la suite sur un autre logiciel "Anais" qui est capable de faire certains traitements des réponses des élèves. Actuellement, il est possible de diagnostiquer automatiquement, à l'aide de ce logiciel, les erreurs des élèves dans la résolution des équations de degré 1. Le travail de thèse de Nghuyen A.Q. devrait notamment nous permettre d'élaborer un cahier de charges pour ce logiciel afin d'effectuer un diagnostic automatique des techniques et erreurs des élèves concernant la résolution des équations de degré 2.

Total représente le nombre de fois où la technique a été mise en œuvre par rapport à l'ensemble des techniques identifiées. R est le nombre de fois où la technique a conduit au succès par rapport au nombre de fois où elle a été mise en œuvre ; E le nombre de fois où la technique a été en échec par rapport au nombre de fois où elle a été mise en œuvre et NT le nombre de fois où la technique n'a pas abouti par rapport au nombre de fois où elle a été mise en œuvre.

Quelques constats sur lesquels nous reviendrons lors de l'étude des erreurs

1 - Conformément au rapport institutionnel de France, les élèves de 2F utilisent de façon majoritaire (86%) les techniques de factorisation et les "règles"

2 - La plupart des élèves de 9VN (90%) se répartissent, quant à eux entre techniques de développement, techniques mixtes (ces dernières commençant toutes par Dev) et techniques de factorisation. On peut donc dire que plus de la moitié (53%) des élèves 9VN démarrent leur résolution par un développement (ce qui est conforme au rapport institutionnel du Viêt-Nam où une équation du second degré est une égalité entre deux polynômes du second degré, que l'on ramène à la forme canonique), seulement 31% d'entre eux utilisant des techniques de factorisation, et moins de10% utilisant les "règles".

3 - Le taux de réussite est plus élevé en 2F qu'en 9VN pour l'ensemble des techniques de factorisation et règles.

4- Contrairement à ce qui se passe en 2F, la plupart des élèves de 9VN terminent les exercices, même quand la première technique mise en œuvre n'aboutit pas (cas des techniques dites mixtes).

III.3 Analyse des erreurs en relation avec les techniques au cours de l'utilisation desquelles elles se produisent

Les erreurs peuvent provenir de la qualité de la mise en oeuvre de la technique et/ou de la qualité même de la technique (portée, validité, adéquation).

Tableau 2 : erreurs/techniques

Principales erreurs rencontrées CODAGE (définition)	**Techniques - Seconde F**	**Techniques - Classe 9 VN**
ECALN (calcul numérique)	IdR-ProdN / Fact-ProdN	Dev / Dev-IsV
ESIGN (lors du développement ou de mouvement d'un membre à l'autre)	Dev / IdR-ProdN / Fact-ProdN	Dev / Fact-ProdN / IdR-ProdN / Dev-IsV
EFACT (lors de la mise en facteurs)	IdR-ProdN / Fact-ProdN	Fact-ProdN / Dev-IsV
EPRODF (lors de l'annulation d'un produit de facteurs)	ProdN	Fact-ProdN / Dev-IsV
ERED (mauvaise application des propriétés de la multiplication et des identités remarquables, lors des réductions)	Dev	Dev / Dev-IsV
ELOG (logique : *et* à la place de *ou*)	absente	Fact-ProdN / Id-Prod / Dev-IsV
ERAC (une racine uniquement)	Rac	Rac / Dev-Rac
Qualité de la technique	Gdev / Simp / Dev_IsV	Gdev / Dev_IsV

Nous proposons de caractériser les principales erreurs rencontrées en relation avec les techniques qui les produisent, en les regroupant dans les quatre grandes familles suivantes.
Pour chaque famille, nous donnons des exemples de production rencontrée en encadré.

- Erreurs de calcul ou de signe dans l'application d'une technique scientifiquement valide

τ_Gfact_ProdN (6x+3)(1-3x)=(2x+1)(-x-4) 2(2x+1)(1-3x)-(2x+1)(-x-4)=0 ECAL (1)	τ_IdR_ProdN $(3x-4)^2-(-5x+1)^2=0$ (3x-4-5x+1)(3x-4+5x-1)=0 (8x-3)(8x-5)=0 ECAL 8x-3=0 ou 8x-5=0 x=3/8 ou x=5/8 (2)
τ Dev (3-x)(x+2)+x+2=0 (3-x)(x+2)+x=2 ESIGN $3x+6-x^2-2x+x=2$ $2x - x^2 = -4$ (3)	τ_Gfact_ProdN (-4x+3)(3x-9)+(4x-3)(x-8)=0 (-4x+3)(3x-9)-(-4x+3)(x+8)=0 ESIGN (-4x+3)((3x-9)-(x+8))=0 (-4x+3)(2x-17)=0 -4x+3=0 ou 2x-17=0 $x=\frac{3}{4}$ ou $x=\frac{17}{2}$ (4)

Les erreurs de calcul sont souvent présentes lors de la mise en facteur d'une constante (1), ou la réduction de monômes (2), elles se rencontrent également pour la technique τ Dev lors de la réduction des termes. Les erreurs de signe se rencontrent notamment lors d'un mouvement : passage d'un membre à l'autre de l'équation (3), et/ou lors de la mise en facteur de –1 (4). Bien entendu ces types d'erreurs peuvent se retrouver dans les familles suivantes, mais elles n'y ont plus de rôle prioritaire.

- Erreurs dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide et adéquate

Dans l'application de Gfact

τ_Fact_ProdN (3-x)(x+2)+x+2=0 (3-x)(2(x+2))=0 EFAC 3-x=0 ou 2x+4=0 -x=-3 ou 2x=-4 x=3 ou x=-2 (5)	Dans l'identité remarquable τ_IdR $x^2 - 11x + 24 = 0$ $\left(x+2\sqrt{6}\right)^2 = 0$ EFAC $\left(x+2\sqrt{6}\right) = 0$ $x=-2\sqrt{6}$ (6)
τ_ProdN (-5x+1)(3x-7)=0 -5x+1=0 ou 3x-7=0 $x=-\frac{1}{5}$ ou $x=-\frac{7}{3}$ ESIGN (7)	τ_ProdN (-5x+1)(3x-7)=0 -5x+1=0 et 3x-7=0 ELOG $x=-\frac{1}{5}$ et $x=-\frac{7}{3}$ (8)

Les principales erreurs rencontrées ici peuvent s'interpréter en termes de :

- non prise en compte des règles de priorité de la multiplication (dans (5), l'élève factorise l'expression comme s'il avait (3-x)[(x+2)+x+2]) ;
- confusion dans les identités remarquables (dans (6), utilisation de l'identité remarquable $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ sans prise en compte du double produit) ;

- problème de signe lors du mouvement nécessaire à la résolution des équations du premier degré.

Une erreur est de plus fréquemment rencontrée chez les élèves Vietnamiens dans l'application de la règle d'annulation d'un produit de deux polynômes : il s'agit de l'erreur de logique consistant à écrire *et* à la place de *ou* (8).

Dans l'application de Règles

τ_ProdN (3-x)(x+2)+x+2=0 (3-x)=0 ou (x+2)+x+2=0 EPRODF 3-x=0 ou 2x+4=0 x=3 ou x=-2 (9)	τ_IdR $-(2x-1)^2+9(-x+2)^2 = 0$ 9(-x+2-2x-1)(-x+2+2x-1)=0 EFAC Interrompu (10)	τ_RAC $(-4x+5)^2=(-2x-7)^2$ -4x+5=-2x-7 ERAC -2x=-12 x=6 (11)

On retrouve dans (9) la non prise en compte de la priorité de la multiplication par rapport à l'addition, qui conduit ici l'élève à transformer une somme de produits en produit de sommes. Dans (10), la difficulté est due à la présence d'un facteur dans une expression de la forme $a^2-k^2b^2$. Enfin, dans (11), l'élève résout l'équation en enlevant des deux côtés le carré, ce qui le conduit à ne donner qu'une des deux racines.

- Erreurs dues à l'utilisation « abusive » de techniques valides sur un champ plus restreint

τ Simp (-2x+1)(-5x-4)=(-5x-4)(x-1) -2x+1=x – 1 3x=2 $x=\frac{2}{3}$ (12)	τ Dev-IsV $(-2x+5)^2 = 0$ $4x^2 - 20x + 25 = 0$ 4x(x – 5) = - 25 x-5 = 25/4 ou 4x=-25 x=(25/4 + 5) ou x= -25/4 (13)

Il faut ici noter que les deux techniques τ Simp (12) et τ Dev-IsV (13) ont chacune un domaine sur lequel elles sont valides : la première l'est dans le cas où on simplifie par une constante et la seconde dans le cas de la résolution des équations du 1° degré.

- Erreurs dues à la mise en œuvre d'une technique valide, mais non adéquate

τ_Gdev $(-2x+5)^2=0$ $(-2x)^2 + 2\times(-2x)\times5+(5)^2=0$ $4x^2-20x+25=0$ Interrompu (14)	τ_IdR_Dev $(3x-4)^2 - (-5x+1)^2 = 0$ (3x-4-5x+1)(3x-4+5x-1)=0 (-3-2x)(8x-5)=0 $24x+15-16x^2+10x=0$ Interrompu (15)

La technique Dev n'est pas adéquate pour (14) et (15) , de plus, elle conduit à une impasse car le discriminant ne figure pas dans le rapport institutionnel des deux institutions étudiées.

IV – Conclusion sur les apports de la TAD pour l'analyse des erreurs en relation avec les praxéologies

Cette étude nous a permis de mettre en évidence un certain nombre de phénomènes communs aux deux populations étudiées.

- L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs (cf. erreurs de signe ou de calcul dans Fact-ProdN).
- Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches ou sous-tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide : ceci renvoie à l'analyse praxéologique d'autres objets de savoir.
- Les erreurs peuvent aussi provenir de l'utilisation de techniques valides sur un champ plus restreint, étendues "abusivement", ou de la mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate institutionnellement.

En ce qui concerne la comparaison 2F, 9VN, nous rappelons que l'expérimentation au VietNam a dû être faite en classe 9 en début d'année (avant l'enseignement du discriminant), ce qui correspond à la rentrée des classes de troisième en France. Soit avec des élèves de près de deux ans de moins que leurs collègues français de seconde, ce qui relativise les résultats comparatifs suivants.

- Le taux de réussite est plus élevé en 2F qu'en 9VN pour l'ensemble des techniques de factorisation et règles.

- Le pourcentage d'élèves qui démarrent la résolution d'une équation de second degré par un développement et vont jusqu'au bout de la résolution est beaucoup plus fort chez les élèves vietnamiens que français : soit ils reviennent à une factorisation (Dev_Fact_ProdN, avec 100% de réussite), soit ils essaient d'isoler les termes comportant l'inconnue (Dev_IsV, avec 100% d'échec).

Nous pouvons formuler plusieurs raisons à ces résultats. D'une part, la technique du discriminant étant enseignée très tôt (deuxième trimestre en classe 9) au Viêt-nam, ceci laisse peu de place au travail de la technique de factorisation (classe 8), alors qu'en France, le travail de cette technique se fait sur trois ans (4°, 3° et seconde). On peut d'autre part voir là l'effet de la conformité entre le rapport personnel des élèves vietnamiens et le rapport institutionnel au collège au VietNam, dans lequel une équation du second degré est une égalité entre deux polynômes du second degré que l'on ramène à la forme canonique.

L'analyse des erreurs que nous avons conduite dans le cadre de la TAD prend en compte le fait que le rapport personnel de l'élève à un objet de savoir se construit dans une société, dans des institutions et est donc assujetti à divers rapports institutionnels qu'il faut analyser, prise en compte que ne permet pas l'étude des erreurs en terme de conceptions.

Nous sommes alors conduits à interpréter les erreurs comme des symptômes de problèmes potentiels dans la fabrication du rapport institutionnel de départ, l'étape suivante du travail devant nous conduire à chercher des solutions à ces problèmes en revenant aux praxéologies.

Références bibliographiques

CHEVALLARD Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1) 73-112.

NGUYEN A.Q., (à paraître) Une étude didactique de l'apprentissage de l'algèbre à l'aide d'un environnement informatique, *Actes du premier séminaire franco-vietnamien de didactique des Mathématiques Didactique, Méthodologie et Enseignement / Apprentissage des Mathématiques,* Ho Chi Minh Ville, juin 2005

NICAUD J.F., BOUHINEAU D., CHAACHOUA H. (2004) Mixing Microworld and CAS Features forBuilding Computer Systems that Help Students to Learn Algebra. International *Journal of Computers for Mathematical Learning*. Vol. 9, p169-211. Kluwer Academic Publisher.

ANNEXE 1 : COMPARAISON DES PROGRAMMES, Nguyen A.Q. (2005)

	FRANCE	VIETNAM	
4ième	**TRAVAUX NUMÉRIQUES** **1.Nombres et calcul numérique** **2.Calcul littéral** -Développement -Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. **-Résolution de problèmes conduisant à des équations du premier degré à une inconnue**	**TRAVAUX NUMÉRIQUES** **1.Multiplication et Division des polynômes** **2.Fractions algébriques** **3.Equation et inéquations du premier degré à une inconnue**	8°
3ième	1.Écriture littérales ; identités remarquables 2.Calculs élémentaires sur les radicaux (racines carrées) **3.Équations et inéquations du premier degré (système)** 4.Nombres entiers et rationnels 5.Fonction linéaire et fonction affine	**1.Nombres réels et racines carrées** **2.Fonction y=ax+b** **3.Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues** **4.Fonction $y=ax^2$** **5.Équations du second degré à une inconnue** -Définition ; équations défectives $ax^2+bx=0$, $ax^2+c=0$ -Résolution en utilisant le discriminant -Théorème de Viète -Équation se ramenant à des équations du 2^{nd} : équations rationnelles, équations contenant des racines, des valeurs absolues, équations du troisième degré, du quatrième degré	9°
SECONDE	**FONCTIONS** 1. Identification de la variable et de l'ensemble de définition d'une fonction 2.Étude qualitative de fonctions 3. Fonction croissante, fonction décroissante ; 4. Premières fonctions de référence 5. Fonctions linéaires et fonctions affines 6. Fonctions et formules algébriques **7. Mise en équation ; résolution algébrique, résolution graphique d'équations et d'inéquations** **-Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.** **-Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou trouver le signe d'une fonction.** **-Résoudre graphiquement des équations ou inéquations**	**FONCTIONS** 1.Notion de fonctions 2. Fonction y=ax+b 3.Fonction carrée $y=ax^2+bx+c$ 4.D'autres fonctions : **ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS** ÉQUATION ET INÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ **1.Généralité de l'équation** **2.Équation et système d'équations du premier degré** **3.Inégalité** **4.Inéquation du premier degré** **5.Système d'inéquations du premier degré** ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS DU DEUXIÈME DEGRÉ **1.Équation du deuxième degré $ax^2+bx+c = 0$** **2.Système d'équations du deuxième degré** **3.Inéquation du deuxième degré** **4.Sommaire du système d'inéquations du deuxième** **5. Théorème inverse de signe de f(x)** **6. Équations et inéquations se ramenant au 2°degré**	10°

ANNEXE II : Liste des exercices proposés (en plusieurs séances)

1.	$(-2x+5)^2 = 0$	10.	$(-4x + 5)^2 = (-2x - 7)^2$
2.	$(-5x + 1)(3x - 7) = 0$	11.	$(3x - 4)^2 - (-5x + 1)^2 = 0$
3.	$(3 - x)(x+2) + x + 2 = 0$	12.	$x^2 = 7$
4.	$(-3+2x)(4x-7)+(-3x+1)(2x-3) = 0$	13.	$-(-3x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = 0$
5.	$(-2x + 1)(-5x - 4) = (-5x - 4)(x - 1)$	14.	$-(2x - 1)^2 + 9(-x + 2)^2 = 0$
6.	$(-4x + 3)(3x-9) + (4x - 3)(x - 8) = 0$	15.	$x^2 + 8x + 16 = 0$
7.	$(2x + 1)(3x - 6) + x - 2 = 0$	16.	$25x^2 - 90x + 81 = 0$
8.	$(-x + 4)(-2x + 3) - (x - 5)(-6 + 4x) = 0$	17.	$2x^2 + 5x - 7 = 0$
9.	$(6x + 3)(1 - 3x) = (2x + 1)(-x - 4)$	18.	$x^2 - 11x + 24 = 0$

ANNEXE III : Techniques utilisées (T) et leur taux de succès (R)

	Seconde								Classe_9 (avant discriminant)							
Technique	Réussi	Échec	non terminé	Total (en ligne)	T	R	E	NT	Réussi	Échec	non terminé	Total (en ligne)	T	R	E	NT
GDév		20	14	34					0	70	23	70				
Dev_Rac		0	0	0					0	13	0	13				
IdR_Dev		4	3	7					1	0	0	1				
total Développt		**24**	**17**	**41**	**9,3**	**0,0**	**58,5**	**41,5**	**1**	**83**	**23**	**107**	**24,7**	**0,9**	**77,6**	**21,5**
Gfact		2	1	3					0	6	1	7				
IdR		17	14	31					0							
Fact_ProdN	78	56	6	140					21	65	0	86				
T_IdR_ProdN	54	31	2	87					14	37	1	52				
T_IdR_CarN	26	3	0	29					15	6	0	21				
total Factorisat	**158**	**109**	**23**	**290**	**66**	**54,5**	**37,6**	**7,9**	**50**	**108**	**1**	**159**	**36,6**	**31,4**	**67,9**	**0,6**
ProdN	22	17	3	41					2	10	0	12				
CarN	14	1	0	15					6	0	0	6				
Rac	8	14	2	24					1	22	0	23				
Simp		6	1	7					0	2	0	2				
total Règles	**44**	**38**	**6**	**88**	**20**	**50,6**	**43,7**	**6,9**	**9**	**34**	**0**	**43**	**9,91**	**20,9**	**79,1**	**0,0**
Dev_Fact_ProdN									13	0	0	13				
Dev_IsV		3	8	11						111	1	112				
total Tech. mixtes	**0**	**3**	**8**	**11**	**2,5**	**0,0**	**27,3**	**72,7**	**13**	**111**	**1**	**125**	**28,8**	**10,4**	**88,8**	**0,8**
Fact_Dev		1	1	1												
Simp_ProdN		2	0	2												
IdR_Simp		2	1	2												
Fact_IdR_ProdN		1	0	1												
total négligées	0	8	3	11					0	0	0	0				
Total tech. Identif	**202**	**182**	**57**	**441**					**73**	**336**	**25**	**434**				
Tech non identifiée		68	0	68						0	0	0				
Total techniques	202	250	57	509					73	336	25	434				