Travail de la question des enjeux non explicités d'apprentissage avec les outils de la théorie anthropologique. Curriculum et chronogenèse praxique.

Corine Castela, Equipe Didirem Paris 7, IUFM de l'Académie de Rouen, France

Corine.Castela@ rouen.iufm.fr

Resumen

En esta comunicación, me propongo presentar una modelación de los aprendizajes necesitados por el conjunto de problemas matemáticos que encuentran los alumnos y alumnas a lo largo de su escolaridad. Esta modelación no refiere a la noción de conocimiento y se centra en las tareas que se encuentran de hecho en la escolaridad.
En primer lugar, introduciré la idea de currículum práxico, currículum visible y también ignorado de los textos oficiales. Luego presentaré las herramientas desarrolladas por Aline Robert para análisis los ejercicios matemáticos. Estas se utilizarán a continuación con el fin de diferenciar los niveles de intervención de una OM dada en los problemas, lo que desembocará en la definición de un tiempo práxico y de una cronogénesis práxica dentro del momento del trabajo de la técnica. Se verá que cronogénesis práxica y cronogénesis teórica no progresan al mismo ritmo. Al fin, teniendo en cuenta la importancia en la resolución de problemas de vincular las OM puntuales relativas al mismo tipo de tareas, propondré simetrizar la organización de las OM según el Saber Sabio desarrollada por Yves Chevallard, introduciendo Organizaciones Matemáticas Práxicas estructuradas según el tipo de tareas.

Summary

This paper proposes a modelling of what students need to learn to solve the set of mathematical problems they face during their school years. This modelling avoids any reference to the idea of knowing (connaissance). It is focused on the tasks students actually face, a point of view I firstly take into account introducing the notion of praxical *curriculum*, a *curriculum* that is visible but largely institutionally ignored. Then, I will present Robert's tools of exercise analysis. These tools will be used to differentiate the ways a given Mathematical Organization intervenes in problems. Hence, it will be possible to define a praxical time and a praxical chronogenesis within the moment of the technical work. We will see that praxical chronogenesis and theoretical chronogenesis do not go at the same pace. Finally, taking into account the importance in problem solving of relating the OM associated to the same type of tasks, I will propose to symmetrizise the OM organization developed by Chevallard, introducing Praxical Mathematical Organizations structured by the type of tasks.

Premier éclaircissement : j'appelle enjeux non explicités (ou ignorés) d'apprentissage des apprentissages

- qui doivent être réalisés par les sujets d'une institution I dans une certaine position pour être de bons sujets de I, pour réussir dans I,
- mais dont I n'organise pas institutionnellement l'apprentissage – autrement dit I n'organise aucun système didactique visant à permettre aux sujets la réalisation des apprentissages en question.

1. Première approche de la problématique des enjeux cachés d'apprentissages : explicitation de l'implicite.

Je me propose dans cette partie de rappeler rapidement le contenu de Castela 2000, article consacré aux savoirs en jeu dans la résolution de problèmes en mathématiques de façon à faire apparaître à la fois la continuité et l'évolution de mes travaux.
L'article en question part du constat d'un **manque**, d'un **défaut d'apprentissage** chez les étudiants préparant le Capes[1] de mathématiques et s'appuie sur une pratique effective de

[1] Concours de recrutement des professeurs de mathématiques de collèges et lycées.

remédiation reposant sur un **enseignement explicite.** Il s'agit de traiter la non réalisation des apprentissages nécessaires en faisant en sorte que les apprentissages visés deviennent **des objets explicites d'enseignement, institutionnellement reconnus.** Dans cette perspective, les enjeux d'apprentissage sont décrits en termes d'acquisition de **connaissances** lesquelles sont modélisées en terme de **savoirs**.
Cette approche s'inscrit dans la problématique de l'existence d'un **curriculum caché, non visible** dans l'institution, qu'il s'agit de rendre institutionnellement visible par un discours.

Dans cette perspective, l'intention qui dirige le travail présenté dans l'article est de définir un domaine de connaissances qui soient susceptibles d'outiller efficacement la résolution de problèmes et qui vérifient certaines conditions a priori favorables à l'émergence des connaissances considérées en tant qu'objets d'apprentissage au sein de l'enseignement des mathématiques, ce que j'ai traduit

- au plan cognitif, en me restreignant à des objets de connaissance dont le mode d'existence **écrit** met à disposition des sujets étudiants des ressources non disponibles lorsque l'objet de connaissance est une pratique,
- au plan institutionnel, en me restreignant à des objets de connaissance dont je postule qu'ils sont explicitement **présents dans certaines institutions de la recherche mathématique**, leur enseignement étant ainsi susceptible d'être doté d'une certaine légitimité par la communauté des experts.

La réponse à cette recherche est l'introduction d'un objet que j'ai nommé le **fonctionnement mathématique** (qui n'est pas le fonctionnement des acteurs humains, des mathématiciens), dont l'article cité donne deux définitions :

- l'ensemble des modalités d'intervention des différents objets mathématiques dans les solutions de problèmes ;
- l'ensemble des rapports entre les objets mathématiques et les problèmes mathématiques (cette seconde définition correspond à une volonté de faire intervenir symétriquement dans l'activité mathématique, la dimension de la résolution de problèmes et celle de l'organisation/théorisation, les types de problèmes se voyant conférer une place décisive, à hauteur des concepts mathématiques ; on retrouvera plus loin dans cet exposé cette démarche de symétrisation).

Cet objet étant défini, je résumerai Castela 2000 de la façon suivante : après avoir donné une description du domaine des connaissances/savoirs sur le fonctionnement mathématique, il développe une argumentation visant à étayer les trois hypothèses suivantes :

- H1 : de telles connaissances sont utiles et consciemment utilisées par les chercheurs en mathématiques dans leur activité de recherche ;
- H2 : elles sont également utiles aux élèves à partir d'un certain niveau au moins ;
- H3 : elles peuvent être reconnues institutionnellement comme des objets d'enseignement.

Toutefois, l'article se termine sur une évolution par rapport à H3, évolution prenant en compte l'objection du glissement métacognitif et l'impossibilité de laisser les connaissances sur le fonctionnement mathématique occuper trop de place dans l'enseignement des mathématiques.

Cette évolution s'est poursuivie depuis la rédaction de l'article de RDM, c'est le résultat actuel de ce mouvement qui est le sujet de cette intervention.

2. Deuxième approche de la problématique des enjeux non explicités d'apprentissage.

2.1. Un curriculum visible, le curriculum praxique.

Je résumerai cette nouvelle approche (qui ne rend pas la première caduque mais permet un autre regard sur la problématique) de la façon suivante : il existe des enjeux d'apprentissage qui ne sont à aucun moment pris en charge explicitement dans l'enseignement, dont on peut même penser qu'ils ne sont pas non plus reconnus par les enseignants dans leurs discours en classe et qui **sont pourtant réalisés par certains élèves**. Cette hypothèse peut être considérée comme trop radicale. Néanmoins je considère comme productif d'adopter ce point de vue extrémiste dans la mesure où il débouche sur la recherche d'outils permettant d'explorer une telle approche, outils que je présenterai dans la suite.

Si des élèves réalisent les apprentissages en question, c'est qu'ils rencontrent des situations qui leur donnent matière pour apprendre. Je postule que ces situations sont issues pour une large part des tâches proposées par l'enseignant, plus précisément des exercices et problèmes. J'introduis donc la notion de **curriculum praxique**. Le curriculum praxique d'un élève est l'ensemble des tâches qu'il rencontre dans son parcours scolaire. On peut le déterminer de manière effective par un simple (mais patient) travail de collecte. De même, on peut réunir tous les éléments du curriculum praxique d'une succession de classes pour des professeurs donnés[2]. Mais généraliser cette idée de curriculum au niveau du système scolaire demande de franchir un pas en conjecturant l'existence d'une partie commune aux différents corpus de tâches élaborés par les divers enseignants de mathématiques à un niveau scolaire donné dans une institution d'enseignement I. Et c'est ce corpus invariant que j'appellerai **Curriculum praxique en mathématiques dans I (**dans la suite **Curriculum praxique)**.

Quelques précisions sur ce que recouvre ici la notion de tâche.
Compte tenu de la problématique présentée précédemment, je me restreindrai constamment dans la suite aux tâches mettant les élèves en situation de résoudre un problème. On peut alors considérer que la tâche est l'énoncé mais comme on le verra plus loin, les analyses qui permettent de situer une tâche donnée dans une progression par rapport à d'autres nécessitent de connaître certains éléments du contexte dans lequel est prescrite cette tâche (Quels sont les savoirs déjà institutionnalisés ? Quels sont les problèmes déjà résolus ? L'énoncé est-il posé dans le cadre d'un chapitre précis ? etc.). En d'autres termes, il est nécessaire de prendre en compte une partie du contrat institutionnel dans l'institution considérée qui dépend du niveau d'analyse. C'est pourquoi le terme *Tâche* renverra ici à un couple, un énoncé et son contexte institutionnel de prescription. Même s'il reste à préciser quels éléments du contrat sont retenus dans l'analyse, cette première définition est opératoire dans le cas où l'objet d'étude est le curriculum praxique d'un élève e, le contrat étant alors le contrat en vigueur dans les

[2] Dans la perspective des travaux d'Aline Robert et Jeanine Rogalski, on pourrait distinguer **curriculum praxique potentiel** (les énoncés choisis par l'enseignant) et **curriculum praxique effectif, réalisé** compte tenu de l'activité que l'enseignant lors du déroulement dans la classe).

classes de mathématiques successives dont e est l'élève. On peut même alors pousser plus loin la finesse de l'étude en prenant en compte la gestion effective du travail par l'enseignant qui a souvent comme effet de redéfinir la tâche initialement prescrite.

Par contre, il n'est pas possible d'en rester là pour le niveau d'analyse macrodidactique auquel prétend la notion de Curriculum praxique dans une institution. Il n'est pas raisonnable de postuler l'existence d'énoncés que poseraient à l'identique et dans le même contexte tous les professeurs d'un niveau donné. Un élément du curriculum praxique dans une institution I est constitué

- d'une part d'un énoncé générique, autrement dit une classes d'énoncés ne différant que sur des variables secondaires, c'est-à-dire sans effet sur l'analyse que la problématique adoptée conduit à appliquer à la tâche ;
- d'autre part, des éléments du contrat institutionnel dans I.

Je continuerai à désigner ces couples (énoncé générique, contexte commun) par le terme de *Tâche*, réservant la notion de *Types de tâches* à des ensembles de tâches rapprochées par la nature de la question mathématique à résoudre.

L'élément le plus important est le suivant : ce curriculum est effectif, il n'est pas caché, il est visible dans l'institution mais il est largement **ignoré par l'institution** (l'expression est ici utilisée avec le sens que l'on trouve dans « elle m'a totalement ignorée »).
Il est vrai que ce corpus émerge dans les IO, aux rubriques Savoir-Faire, Compétences mais celles-ci restent très allusives et ne suffisent absolument pas à définir l'ensemble des « passages obligés ». C'est alors une question de recherche que de mettre en évidence des mécanismes régulateurs de l'activité de choix des enseignants :

- Au plan institutionnel, il existe des dispositifs assez voyants qui encadrent les enseignants: épreuve professionnelle du Capes, évaluations nationales, manuels[3].
- Mais, on peut penser qu'il existe des régulations internes au corps enseignant (par exemple, devoir commun pour toutes les classes d'un niveau) dont l'existence est à établir et les formes à explorer.

Admettons donc maintenant l'existence de ce curriculum praxique qui n'est pour l'instant qu'une succession de tâches. Se pose la question d'y mettre en évidence une progression marquée par la présence d'enjeux d'apprentissage. Autrement dit, il s'agit de se doter d'outils permettant de repérer et de modéliser **un temps praxique.**
Je vais ici faire le choix, à mon avis complètement inscrit dans l'approche anthropologique, de m'en tenir à une analyse des tâches elles-mêmes pour traiter ce problème, sans recourir à une interprétation en terme de connaissances, ni à une modélisation en terme de savoirs[4].

Il s'agit donc de trouver des outils qui permettent de différencier les tâches, plus précisément les énoncés d'exercices et de problèmes, en introduisant une hiérarchie. Il est clair qu'une première entrée consiste à rechercher les éléments du savoir savant utilisé dans la solution (ou

[3] Je pense que ces passages obligés sont très liés aux mathématiques elles-mêmes et à un savoir du fonctionnement mathématique des objets de savoir savant explicitement enseigné.
[4] Ce qui ne veut pas dire qu'il n'y a pas en filigrane des interprétations au niveau de l'activité des élèves mais on ne se situera pas sur ce plan pour la modélisation.

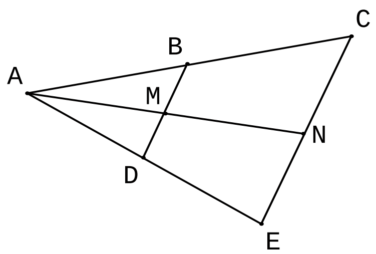
les solutions) accessibles à un niveau donné. Il est tout aussi évident que ceci est insuffisant sauf à simplement retrouver le curriculum institutionnel et sa chronogenèse.

Dans la mesure où il s'agit de pratique de résolution, nous disposons d'un outil avec la notion d'organisation praxéologique mathématique ponctuelle, OM = [T, τ , θ, Θ]. On peut regarder quelles OM interviennent dans un problème. Mais ce grain d'analyse est insuffisant : des tâches faisant intervenir les mêmes OM peuvent solliciter de manière très différente l'activité des élèves. Ceci est une réflexion qu'Aline Robert fait depuis plusieurs années et ce sont ses outils d'analyse des énoncés de problèmes que j'utilise pour différencier les niveaux d'intervention d'une OM dans une tâche et mettre en évidence des progressions[5].

2.2. Rappel des outils d'analyse des tâches proposés par Aline Robert

Exemple 1 : Déclic Seconde[6] Maths 2000, Chapitre 9 : Configurations du plan

Enoncé



On a
AB = 3   BC = 4,5,
MN = 3,6 BM = 1,5
AD = 2,5
La droite (BD) est parallèle à (CE)
Calculer AE, AM et CN

Analyse

Ce problème est posé dans un chapitre de Seconde qui a pour but de réviser l'ensemble du programme de collège concernant les configurations géométriques. A priori ce chapitre n'est pas étiqueté par une technologie particulière ; ceci étant la situation initiale contient plusieurs ingrédients typiques de l'OM (OM_1) mise en place au collège utilisant le théorème de Thalès pour déterminer une longueur manquante. Avec les termes d'Aline Robert, je dirai donc que cet exercice sollicite OM_1 **au niveau mobilisable**. Mais les données sont telles qu'il faut **adapter** la technique classique puisque la résolution débouche sur l'égalité $\frac{AM}{AM+3,6}=\frac{3}{7,5}$.

Ceci fait donc apparaître dans le cours de la résolution un second type de tâches T_2, que l'on pourrait définir comme suit : « Résoudre une équation faisant intervenir un quotient d'expressions dans lesquelles l'inconnue intervient au premier degré ». T_2 est totalement absent de l'énoncé comme du contexte de la tâche : aucun élément technologique lié à ce type de tâches n'est présent (l'exercice ne relève pas d'un chapitre algébrique, l'ostensif x n'est pas présent). L'identification du type de tâches est donc à la charge des élèves ; dès lors toute OM associée à T_2 intervient **au niveau disponible.** Deux techniques de résolution, donc deux OM, sont éventuellement envisageables à ce niveau (OM_2 traitement par produit en croix, OM_2' passage dans le même membre puis réduction au même dénominateur et annulation du

[5] Je fais ainsi le choix de ne pas scinder un type de tâches en sous-types qui seraient exactement équivalents du point de vue du savoir mathématique mais différenciés d'un point de vue cognitif et didactique par la formulation de l'énoncé ou le contexte.

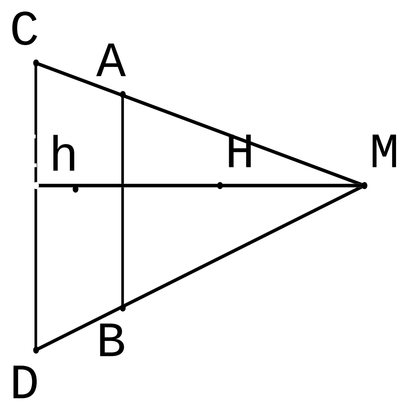
[6] Seconde : première année de lycée, 15-16 ans

numérateur). Remarquons enfin que cette intervention de T_2 a lieu dans un contexte d'objets mathématiques que l'on peut considérer comme relativement stabilisés à ce niveau (théorème de Thalès et nombres décimaux).

Dans les termes d'Aline Robert qui interprète les éléments observés sur l'énoncé sur le plan de l'activité (potentielle) de l'élève, on peut dire que dans cette tâche, l'élève n'a pas la responsabilité pleine et entière de reconnaître le contexte d'utilisation du théorème de Thalès mais qu'il faut qu'il utilise en les adaptant les connaissances associées (fonctionnement au niveau mobilisable, tâche non simple du fait de la présence d'une adaptation). Par contre, il doit reconnaître sans aucune indication la tâche de résolution d'une équation (niveau disponible), il doit mobiliser la ou les techniques de résolution et choisir celle qu'il va utiliser.

Exemple 2 : Programme de Physique, Belin Seconde Physique-Chimie
Ch.15 : Les longueurs à l'échelle humaine

Enoncé



La méthode de la parallaxe
La méthode de la parallaxe est fondée sur une constatation simple : la direction de visée d'un point M change quand on se déplace d'un point A à un point B. La mesure des angles $M\hat{A}B$ et $A\hat{B}M$ ou l'application du théorème de Thalès, permet de calculer la distance entre M et AB.

Dans l'activité 2 (ceci fait référence à une activité expérimentale antérieure), les directions de visée de M sont repérées par les points C et D. Le théorème de Thalès permet d'écrire :
MA/MC = AB/CD = $\frac{H}{h+H}$ et donc de calculer H.

Analyse

Cet exercice est rencontré en Physique ; il s'agit de la détermination d'une distance inaccessible par la méthode de la parallaxe. La méthode adoptée dans la première partie expérimentale produit les données d'une deuxième partie mathématique dont l'analyse est très proche de celle que nous avons proposée pour le premier exemple. Concernant OM_1, la modélisation par le dessin est donnée et le théorème de Thalès cité. Néanmoins on peut noter que cette intervention de OM_1 est provoquée par une organisation Physique Expérimentale (ce qui peut provoquer des difficultés et quoiqu'il en soit marque l'insertion de OM_1 dans un nouveau réseau). OM_2 (ou OM_2') intervient au niveau disponible mais, par rapport au premier exemple, il faut ajouter que la technique devra être utilisée dans un contexte différent puisque l'usage en physique est d'inverser les formules sous forme littérale avant d'autoriser la substitution des valeurs numériques.
Ici, avec les outils d'Aline Robert, on mettra en avant le caractère **non isolé** de l'intervention de OM_2 : c'était déjà le cas dans le premier exercice du fait de l'enchaînement avec OM_1 mais, si on peut considérer que OM_1 est en place de manière assez solide en Seconde, on ne

peut en dire autant de la manipulation des expressions comprenant plusieurs paramètres littéraux (ce qui intervient chez A. Robert sous forme d'une analyse en terme d'**ancien/nouveau**). On aurait eu le même genre de configuration dans l'exercice 1 avec des valeurs numériques fractionnaires ou irrationnelles.

Exemple 3 : Terracher Première S[7] Analyse 2001 ; Ch.8 : Suites, notion de limite.

Enoncé

La suite (u_n) est définie par son premier terme $u_1 = 0$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$$

1. On pose, pour tout n ≥ 1 : $v_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 2}$ et on admet que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies pour tout n ≥ 1. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
2. En déduire que la suite (v_n) est géométrique et calculer la limite de $(|v_n|)$.
3. Exprimer u_n en fonction de v_n. En déduire la limite de (u_n).

Analyse

Cet exercice est un exercice classique d'étude d'une suite récurrente homographique présentant une méthode qui permet d'aboutir à une formulation de la suite récurrente comme fonction de n grâce à l'introduction d'une suite annexe géométrique (v_n). T_2 intervient dans la troisième question lorsqu'il s'agit d'exprimer u_n en fonction de v_n. Cette intervention est provoquée par le fonctionnement d'une OM en cours d'installation (en réalité de plusieurs OM du thème « Suites »). L'étude des suites est l'objet explicite d'enseignement du chapitre qui accueille l'énoncé proposé. Remarquons que dans cet exemple, les interventions des OM sensibles se situent au niveau mobilisable.

En résumé

- Dans le premier exemple, OM_1 intervient au niveau **mobilisable**, de manière **non simple** car son déroulement nécessite une **adaptation** et suscite l'intervention de OM_2 ; celle-ci intervient au niveau **disponible** avec des objets anciens.
- Dans les deux autres exemples, OM_2 intervient de même au niveau disponible, de manière **non isolée** car son utilisation met en jeu des **objets en cours d'acquisition**, objets d'enseignement **récent** dans l'exemple 2, objets de l'enseignement en cours, donc **nouveaux**, dans l'exemple 3.

Ainsi, en complétant le choix d'énoncés proposé d'exemples qui feraient intervenir OM_2

- au niveau le plus élémentaire qui est le niveau **technique** (mise en œuvre **simple et isolée**) des exercices initiaux sur les équations,
- au niveau mobilisable (comme c'est le cas de OM_1 dans le premier exercice) mettant en jeu des objets anciens puis des objets sensibles comme des irrationnels,

on peut mettre en évidence une progression des tâches, **un temps praxique relativement à OM_2**, marqué par des niveaux successifs de fonctionnement de OM_2 dans les tâches soumises aux élèves entre la quatrième[8] et la Première S. Dans les classes où sont posés les exercices

[7] Première S : deuxième année de lycée, option scientifique, 16-17 ans.
[8] Troisième année de collège, 13-14 ans

que j'ai cités, **cette organisation n'est plus un objet sensible, pourtant le rapport institutionnel des élèves à cet objet doit nécessairement évoluer** de façon à ce que cette OM puisse être mobilisée sous la responsabilité des élèves dans des contextes complètement nouveaux comme dans le dernier exercice.
Il s'agit maintenant de généraliser cette approche.

2.3. Axes d'analyse de l'intervention dans une tâche d'une OM [T, τ, θ, Θ]

Les questions qui suivent peuvent être utilisées pour analyser relativement à une OM donnée [T, τ, θ, Θ] un énoncé de problème et une solution au problème considéré, solution faisant intervenir cette OM. C'est à ce niveau que je me situe puisque je me place à un niveau curriculaire institutionnel. Mais il est évident que cette analyse a priori ne peut mettre en évidence que des éléments potentiels, qui seront à reprendre pour tenir compte des effets de l'activité du professeur, si on se situe au niveau de séances effectives. Les mêmes outils restent utilisables pour analyser la tâche telle qu'elle a été effectivement proposée pendant la séance.

Le premier axe de questionnement est centré sur la distinction Disponible/Mobilisable et porte un intérêt particulier à l'existence d'une multiplicité d'OM déjà enseignées relativement à un même type de tâches.
A.1. Est-ce que le type T est présent dans l'énoncé et ce sous une forme classique pour les élèves (par exemple avec les ostensifs usuellement attachés à T) ?
A.2. Est-ce que pour ce type de tâches, plusieurs OM_i = [T, τ_i, θ_i, Θ_i] ont été enseignées ?
A.3. Est-ce que sont présents dans l'énoncé (ou dans le contexte de prescription de la tâche) des objets de la technologie θ de OM ?
A.4. Est-ce que τ est la seule technique de traitement de T justifiable par θ ?

La succession de ces questions donne lieu à une classification (voir page suivante) des interventions dans les différentes tâches de l'OM qui est l'objet de l'analyse.

On peut douter que les élèves soient confrontés au niveau disponible et encore plus qu'ils aient à choisir parmi plusieurs techniques. Or nous avons constaté (OM2 dans les exemples) que dans le cas où la tâche t relevant du type T intervient comme étape nécessaire à la mise en œuvre d'une technique τ' visant à résoudre une tâche t' relevant d'un type T', justifiée par une technologie θ', la réponse à la première question peut être négative, surtout si θ' est distincte de θ et plus encore si ces deux technologies ne relèvent pas de la même théorie (voir exemples). Dans ce cas, il est possible que plusieurs OM relevant de technologies différentes aient été enseignées pour le type T (exemple : T démontrer une inégalité dans de nombreux problèmes d'analyse en Terminale S[9]) ; donc non seulement la question de la reconnaissance de T est posée mais aussi celle du choix de l'OM à mobiliser.

[9] Terminale S : année du baccalauréat, option Scientifique.

Arbre d'analyse de l'intervention d'une OM selon l'axe Mobilisable/Disponible

1. Présence de T ?

Non

Niveau Disponible

(Choix de τ si Oui à 2)

Oui

2. Multiplicité des techniques ?

Non

Niveau Mobilisable

Oui

3. Présence de θ ?

Non

Niveau Disponible

Choix de technique

Oui

4. Unicité τ pour θ ?

Non Disponible

Choix de technique

Oui

Mobilisable

Ceci me conduit à considérer comme un outil important d'analyse d'une tâche la description de la solution sous forme d'un enchaînement orienté d'OM ponctuelles, chaque question se voyant associer une suite $(OM_i)_{i\mu 0}$ dans laquelle OM_0 permet de traiter une tâche présente dans la question (ces questions peuvent être des étapes de la solution d'une même tâche initiale). Une étape cruciale du curriculum praxique relativement à OM est marquée par l'apparition de OM dans des positions d'indice strictement positif.

OM_i suscite OM_{i+1}[10]

Cette problématique met en avant **le caractère non algorithmique des techniques** qui à mon avis est une donnée essentielle de l'activité mathématique.

Le second axe de questionnement porte sur les adaptations de l'OM, avec un accent particulier sur les objets qui sont impliqués dans la mise en œuvre de la technique :

B. 1. Est-ce que la technique τ est mise en œuvre sous sa forme classique (enseignée) ou bien doit-elle être **adaptée** ? Ces adaptations sont susceptibles de susciter des tâches et des OM non présentes dans l'énoncé.

B.2. En particulier (mais je le considère à part comme un critère très important pour pointer des étapes du curriculum praxique), la mise en œuvre de la technique nécessite-t-elle de manipuler **des objets de savoir ou des OM en cours d'acquisition**, en particulier des objets dont l'enseignement est en cours ?

[10] Chez Yves Chevallard (EE 2001), les relations entre les OM sont utilisées en sens inverse : il s'agit de motiver l'étude de OM_1 par OM_0,

2.4. *Niveaux d'intervention d'une OM dans une tâche et chronogenèse praxique au sein du moment du travail de la technique.*

Je distinguerai plusieurs niveaux d'intervention d'une OM donnée dans une tâche en croisant les trois critères de questionnement présentés précédemment : Mobilisable/Disponible, Unicité/Multiplicité des OM associées à T, Ancien/Nouveau pour les objets manipulés.
I Niveau technique ;
II Niveau mobilisable avec adaptation dont mobilisable avec des objets récents ;
III Niveau mobilisable[11] avec des objets nouveaux ;
IV Niveau disponible sans ou avec adaptation mais avec des objets de savoir et OM relativement anciens (par exemple en seconde position, suscitée par la mise en œuvre d'une OM familière), sans nécessité de choisir une technique ;
V Idem avec plusieurs techniques connues a priori adaptées à la tâche ;
VI Niveau disponible avec des objets en cours d'acquisition ou nouveaux, sans ou avec multiplicité de techniques ; notamment en position seconde par rapport à une OM en cours d'acquisition, ce contexte étant celui pour lequel la multiplicité des OM a priori pertinentes est la plus vraisemblable.

Ainsi le moment de l'étude consacré au travail de la technique pour une OM ponctuelle donnée peut être balisé par des niveaux au moins partiellement hiérarchisés d'intervention de l'OM. Se trouve donc ainsi défini un temps praxique relativement à une OM donnée. Il devient dès lors possible d'analyser une situation d'enseignement du point de vue de la chronogenèse praxique.

Dans cette analyse, on retrouve un élément que j'avais particulièrement mis en avant dans l'article de RDM sur le fonctionnement mathématique, à savoir l'existence d'une multiplicité d'OM relatives au même type de tâches T. Le surgissement dans le cours d'une résolution d'un type de tâches éventuellement totalement étranger aux éléments de technologie, voire de théorie présents jusque là dans le contexte de la recherche impose la présence d'une organisation des connaissances pilotées par les types de problèmes qu'il s'agit de considérer comme des objets autonomes, et pas seulement par le savoir savant. Il est donc question ici de regrouper des OM. Yves Chevallard propose avec ses niveaux de codétermination didactique inférieurs une telle organisation, je vais maintenant montrer que cette proposition n'est pas adaptée à mon propos.

[11] On remarquera dans le schéma antérieur que le niveau mobilisable est incompatible avec la nécessité de choisir une technique parmi plusieurs compatibles avec les éléments de l'énoncé et du contexte.

2.5. Symétrisation de l'organisation des OM en niveaux de codétermination : les Organisations Mathématiques Praxiques.

Le tableau ci-dessous rappelle ce que sont les niveaux de codétermination proposés par Yves Chevallard :

OM ponctuelle	$[T, \tau, \theta, \Theta]$	Sujet d'études
OM locale	$[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]_I$	Thème d'études Structuration pilotée par θ
OM régionale	$[T_{ji}, \tau_{ji}, \theta_j, \Theta]_{j,i}$	Secteur d'études Structuration pilotée par Θ
OM globale	$[T_{kji}, \tau_{kji}, \theta_{kj}, \Theta_k]_{k,j,i}$	Domaine d'études Réunion de plusieurs théories

J'accompagnerai ce tableau d'une citation d'Yves Chevallard (Actes de l'EE 2001 p.42) :

« Pour le professeur, déjà, l'unité de compte – non bien sûr l'unité *minimale* – est plus vaste : c'est autour d'une technologie θ, qui prend alors le statut de thème d'études, que se regroupe pour lui un ensemble de types de tâches T_i à chacun desquels, selon la tradition en vigueur dans le cours d'études, la technologie θ permettra d'associer une technique τ_i. »

Au niveau de l'unité minimale, l'OM ponctuelle se lit essentiellement au départ de gauche à droite, partant d'un type de tâches et d'une technique (ce qui n'est pas porteur d'une hypothèse d'unicité de la technique), bloc practico-technique auquel est associée une technologie qui le justifie puis une théorie dont on peut imaginer que, dans un développement des mathématiques motivé par la pratique mathématique, elle naît d'un souci d'organiser un certain nombre de technologies. Or la citation ci-dessus et les niveaux successifs d'organisation proposés se situent dans une logique inverse :

- Dans la citation, c'est la technologie qui introduit le bloc $[T, \tau]$ avec une hypothèse qui mathématiquement n'est pas fondée d'unicité de la technique associée à un couple $[T, \theta]$. Par exemple, si on considère comme un thème d'étude le thème Barycentre, il existe dans ce thème au moins deux techniques (vectorielle et analytique) pour le type de tâches : « Construire le barycentre d'un système de points ». Si on veut garder l'unicité, on est amené à reprendre le point de vue initial piloté par le bloc $[T, \tau]$ et du coup la technologie est réduite (un théorème par exemple), ce qui change le niveau du chapitre Barycentre qui devient un secteur[12]. On peut être amené à constater que l'OD mise en place finit toujours par privilégier une technique parmi plusieurs mais dans ce cas, on a changé de plan d'analyse (OD et non OM).
- Ce sont les théories puis les technologies qui structurent les niveaux d'OM. Autrement dit l'organisation proposée est une organisation pilotée par le savoir théorique. J'ai

[12] En fait, suivant les exemples donnés par Yves Chevallard la taille du thème et du secteur sont variables. Le contexte du questionnement qui conduit à recourir à ces niveaux influence les choix.

envie de dire que c'est une organisation motivée par un souci didactique à l'intérieur des mathématiques, volonté d'organiser et de diffuser le savoir. Ceci me conduit à considérer qu'il s'agit d'une structuration mathématique didactique ou au moins théorique, dénomination que je retiendrai dans le sigle OMT.

Ces niveaux de détermination montrent effectivement leur efficacité pour analyser le curriculum explicite. Par contre, ils ne sont pas suffisants si l'on s'intéresse à la pratique de résolution de problèmes. Celle-ci sollicite un autre style d'organisation, d'autres types de liens, ce que je pourrai appeler des **organisations mathématiques praxiques**, pilotées par les types de tâches. Les OMP proposées permettent de prendre explicitement en compte le fait que pour un même type de tâches peuvent exister différentes techniques relevant éventuellement de la même technologie et surtout de différents thèmes d'études, voire de secteurs ou même de domaines différents (ce qui signifie que sous des indices i, j, voire k, différents on retrouve le même type).

OMP ponctuelle	$[T, \tau, \theta, \Theta]$	Une seule technique
OMP locale relative à T	$OM_{T\theta\Theta} = [T, \tau_i, \theta, \Theta]_i$	Inscrite dans un seul thème Plusieurs techniques
OMP régionale relative à T	$OM_{T\Theta} = [T, \tau_{ji}, \theta_j, \Theta]_{j,i}$	Plusieurs techniques relevant de plusieurs thèmes, un seul secteur
OMP globale relative à T	$OM_T = [T, \tau_{kji}, \theta_{kj}, \Theta_k]_{k,j,i}$	Plusieurs théories, un seul domaine
OMP transversale relative à T	$OM_T = [T, \tau_{kji}, \theta_{kj}, \Theta_k]_{k,j,i}$	Plusieurs domaines, plusieurs théories

Je traduirai mes hypothèses concernant l'activité de résolution de problèmes des mathématiciens (mais aussi au Capes) par le fait que dans le contexte d'un problème donné, un type T peut apparaître sans qu'aucune technologie θ, associée à T dans les OMP locales relatives à T ne soient présentes. Ceci rend nécessaire l'identification de T en l'absence de l'un quelconque des thèmes d'étude qui l'accueillent et l'examen ouvert des techniques relevant des OMP de niveau supérieur, régionale, globale voire transversale.

Au niveau scolaire, les exemples examinés montrent que de telles situations peuvent se rencontrer dans le cas d'OM anciennes. Je ferai l'hypothèse qu'il existe **des types de tâches pour lesquels l'enjeu du curriculum praxique est au moins l'installation d'une OMP régionale, voire globale ou même transversale (**il est difficile de préciser plus en toute généralité, cela dépend notamment de ce que l'on décide considérer comme un thème).
Que cette hypothèse n'est pas totalement aberrante peut être facilement établi en donnant des exemples de type de tâches pour lesquelles les élèves possèdent bien plusieurs techniques relevant de thèmes différents :

- En Seconde, pour calculer une longueur dans un triangle rectangle, deux OM au moins ont été enseignées, le théorème de Pythagore et les fonctions trigonométriques, elles ne relèvent pas du même thème ;

- En Terminale S, pour établir une inégalité, plusieurs OM sont présentes qui mettent en jeu les domaines de l'algèbre et de l'analyse dont plusieurs secteurs sont concernés (variation des fonctions, dérivation, intégration)[13].

Ceci étant, établir que le curriculum praxique situe bien les enjeux à ce niveau suppose d'analyser les tâches qui y sont effectivement présentes de façon à montrer que certaines font intervenir ces OM au niveau disponible.

2.6. Compatibilité entre les niveaux d'intervention d'une OM dans les tâches et l'organisation du curriculum explicite

Dans la mesure où le curriculum explicite est organisé selon les niveaux d'organisations proposées par Y.Chevallard, la présence des différents niveaux de tâches relativement à une OM dans le curriculum est conditionnée par la façon dont les niveaux de tâches considérés peuvent trouver place dans le curriculum officiel.

Niveaux compatibles avec le thème d'étude où s'inscrit l'OM considérée notée dans ce qui suit $\mathbf{OM_0 = [T_0, \tau_0, \theta_0, \Theta_0]}$

I Niveau technique ;
II Niveau mobilisable avec adaptation dont mobilisable avec des objets sensibles récents ;
IV Niveau disponible sans ou avec adaptation mais avec des objets de savoir et autres OM relativement anciens, sans nécessité de choisir une technique pour T_0 ;
Si il existe dans ce thème plusieurs techniques possibles pour T_0
V Niveau IV avec choix de techniques.

Ces niveaux qui travaillent à la mise en place de l'OM ponctuelle OM_0 (I, II, IV) ou d'une l'OMP locale (V) si elle existe peuvent relever du temps t où le thème considéré est l'objet d'enseignement. Mais ils ne font pas avancer le temps didactique ce qui peut se traduire et se traduit de fait (à vérifier) par une minoration des niveaux IV et V, voire II.
Notons de plus que, dans le cas où il n'y a dans le thème qu'une seule technique, il est très difficile de créer le contexte d'une intervention au niveau disponible dans la mesure où si la tâche apparaît dans le contexte, le contrat didactique usuel suffit à mobiliser OM_0 en cours d'enseignement. Le niveau IV ne peut alors être proposé qu'au travers d'un problème dans lequel la tâche n'apparaît qu'en seconde position, suscitée par la mise en œuvre d'une autre OM.

Niveaux prenant nécessairement place dans des thèmes ultérieurs

III Niveau mobilisable avec des objets nouveaux ;
VI Niveau disponible avec des objets nouveaux, sans ou avec multiplicité de techniques ; notamment en position seconde par rapport à une OM en cours d'acquisition, ce contexte étant celui pour lequel la multiplicité des OM relatives à T_0 est la plus vraisemblable.

Dans la mesure où pour ces niveaux, il y a avancée du temps didactique, la poursuite du travail de la technique τ_0 est viable, d'autant que pour les OM en cours d'enseignement, le

[13] Cet exemple est développé dans le cours que j'ai présenté en 2005 à l'Ecole d'été de didactique des mathématiques ; à paraître dans les Actes.

niveau d'intervention peut-être nettement inférieur. Autrement dit, ce moment du travail de OM_0 est parfaitement accueilli par les premières étapes du travail des nouvelles techniques. On trouvera en particulier à ce moment de l'étude les « passages obligés » du curriculum praxique, tel l'exemple consacré aux suites homographiques présenté précédemment.

Niveaux sans véritable habitat

Il s'agit ici essentiellement du Niveau V, disponible, avec des objets de savoir et autres OM relativement anciens, dans les cas où sont a priori pertinentes plusieurs OMP ponctuelles pour le type de tâches T_0, chacune relevant de thèmes d'étude différents (OM_0 est ici la seule OM relative à T_0 sous le contrôle de θ_0) ; les élèves doivent alors choisir une technique efficace, l'enjeu étant la mise en place d'une OMP au moins régionale.

Signalons à nouveau la difficulté à se situer complètement au niveau disponible quand OM_0 est un des objets sensibles travaillés dans le thème. Ainsi, pour qu'il y ait réellement nécessité de choisir entre plusieurs OM relatives à T_0, il faut poser le problème en dehors du thème d'étude ou bien, dans le cadre du thème, travailler sur plusieurs tâches dont certaines ne peuvent pas se résoudre grâce à OM_0 et qui de fait se situeront en dehors du thème.
Compte tenu des difficultés analogues signalées plus haut, on peut également considérer que le niveau IV est un candidat raisonnable pour cette catégorie.

Ces niveaux sont ceux dont la viabilité est la plus incertaine, réfugiés dans des devoirs à la maison, d'autant que les OM antérieures relatives à T_0 entre lesquelles l'élève doit être amené à faire un choix peuvent relever des années précédentes.

Conclusions

Mes hypothèses sont les suivantes :

- Il existe un corpus commun aux enseignants d'un niveau donné, les passages obligés qu'il contient faisant à partir d'un certain niveau intervenir un certain nombre d'OM relativement anciennes au niveau VI. Ceci situe les apprentissages nécessaires à la réussite scolaire.
- Les niveaux intermédiaires permettent de mettre sur pied des situations d'apprentissage largement implicites (cela va dépendre des enseignants et fait intervenir le discours de commentaire) de nature à favoriser l'accès au niveau VI (y compris en l'absence d'une intervention explicite de l'enseignant si le milieu de l'étude - Félix, 2002 - peu à peu constitué est assez riche).
- Le fait que ces tâches soient effectivement choisies par les enseignants (puis mises en œuvre sans descendre à des niveaux inférieurs d'intervention des OM) dépend de l'enseignant. Ces choix ont des effets différenciateurs sur les élèves dans la mesure où ils peuvent être plus ou moins privés par leur professeur d'un milieu de l'étude suffisamment riche. Dans ce cas, c'est à l'occasion de tâches mettant en jeu des objets nouveaux qu'il leur faudra réaliser l'apprentissage en question, ce dans un contexte qui ne favorise pas les demandes d'éclaircissement sur les objets anciens (certains apprennent néanmoins dans ces conditions).
- Toutefois, il existerait des effets « établissement » qui réduirait la variabilité des choix des enseignants, créant un genre relatif au choix d'exercices. Jouerait ici très fortement

l'image que les professeurs se font globalement du futur de leur public, en particulier l'inscription de l'établissement dans un cursus d'études longues, voire de classes préparatoires ou non. Ces effets auraient tendance à défavoriser les élèves qui auraient le plus besoin de se voir proposer un processus d'apprentissage, en les privant de la fréquentation des niveaux intermédiaires. Cet effet différenciateur serait subi par tous les élèves d'un établissement mais éventuellement compensé au moment voulu par les cours particuliers pour les élèves issus de famille qui en ont les moyens.

- Enfin, même en présence d'une progression riche, les élèves ne sont pas tous également capables de réaliser ces apprentissages en autodidacte. Ce qui ouvre la question des gestes de l'étude pour l'élève et des interventions explicites de l'enseignant.

Bibliographie

CASTELA C. (2000) : Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique**.** *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 20 n°3*, 331-380

CASTELA C. (2002) : *Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, Université et Classes préparatoires aux Grandes Ecoles.* Cahier de Didirem n°40, IREM Paris 7

CASTELA C. (2004): Institutions influencing Mathematics students' private work: a factor of academic achievement. E*ducational Studies in Mathematics* vol 57, 33-63 Kluwer Academic Publishers

CASTELA C. : Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes. *Actes de la 13ième Ecole d'été de didactique des mathématiques* A paraître

CHEVALLARD Y. (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques vol 19 n°2, 221-266*

CHEVALLARD Y. (2002) : Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. En J-L. Dorier & Al. (Eds) *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques -Corps- 21-30 Août 2001* (pp. 3-22) Grenoble : La Pensée Sauvage.

FELIX C. (2002) : *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire.* Thèse Université d'Aix-Marseille Sciences de l'Education

ROBERT A., ROGALSKI M. (2002) : Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices – le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe, *Petit x*, n° 60, pp6-25.

ROBERT A., POUYANNE N. (2004) : *Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation*. Document pour la formation des enseignants n°5 IREM Paris 7