Anthropologie didactique du numérique dans l'enseignement secondaire français

Alain Bronner

LIRDEF, IUFM de Montpellier[1]

RESUMEN

Esta comunicación se basa en las investigaciones que estoy llevando a cabo en didáctica de las matemáticas sobre lo numérico (Bronner 1997, 1998, 2001). Conciernen el estudio de las relaciones personales de los sujetos alumnos y profesores al objeto "numérico" y también el estudio de la transposición didáctico de lo numérico en la enseñanza secundaria francesa. El punto central es el de los proyectos de enseñanza en los que se introducen, producen, hacen intervenir o trabajan números "idecimales" (Bronner 1997) o números irracionales. Este trabajo se efectúa básicamente en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) tanto en sus inicios como en sus últimos desarrollos (Chevallard 1985, 1992, 1999). En esta comunicación propongo por un lado recordar los resultados principiales obtenidos acerca de lo "numérico" y, por otro, mostrar en qué medida la TAD ha sido, para mí, el marco teórico y metodológico adaptado y funcional para este tipo de estudio.

ABSTRACT

This communication is based on my researches in didactics of the mathematics on the numeric (Bronner on 1997, 1998, 2001). They concern the study of the personal relationships of the subjects pupils and teachers with the "numeric". We also study the didactic transposition of the numeric in French secondary education. The main purpose concerns the projects of learning into which *"idecimal" numbers* (Bronner 1997) or irrational numbers are introduced, produced or worked with. The theoretical framework of this research is the Anthropological Theory of Didactics (ATD) both at its beginning and at its last developments (Chevallard 1985, 1992, 1999). My purpose in this communication is, on the one hand, to keep in mind the main results obtained on the "numeric" and, on the other hand, to show to what extent ATD is, for me, the theoretical and methodological framework adapted and functional for this type of study.

1. Introduction

Je souhaite profiter de ce moment qui m'est offert dans ce colloque sur la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) pour interroger le cadre théorique et méthodologique dans lequel je me suis placé dans mes recherches sur le numérique. Mes premiers travaux s'inscrivent en didactique des mathématiques à une époque où la Théorie des Situations Didactiques était incontournable ainsi que d'autres paradigmes comme celui des champs conceptuels. Après avoir travaillé dans ces paradigmes, j'ai ressenti le besoin de reprendre

---

[1] IUFM de Montpellier, 2 Place Godechot, BP 4152, 34092 MONTPELLIER CEDEX, FRANCE

mes premières théorisations et de les repenser dans le cadre de la TAD, cette dernière commençait à être plus largement diffusée, mais pas encore amplement utilisée. Tout d'abord je commencerai par rappeler les problématiques de mes travaux, les outils théoriques utilisés, les principaux résultats obtenus à propos du « numérique » ; puis j'essaierai de montrer dans quelle mesure la TAD est un cadre théorique, adapté et fonctionnel, pour ce type d'étude.

2. Les questions de recherche

Elles concernent l'étude des rapports personnels des sujets élèves et enseignants à l'objet « numérique », et également l'étude de la transposition didactique du numérique dans l'Enseignement Mathématique Secondaire français (en abrégé EMS dans la suite de l'article). Le point central est celui des projets d'enseignement dans lesquels l'on introduit, produit, fait intervenir ou encore travaille des nombres idécimaux (Bronner 1997) ou des nombres irrationnels.

Pendant une certaine période, les nombres réels vivaient au collège sous forme de suites décimales illimitées : c'était la période des mathématiques modernes. La contre-réforme et les réformes ultérieures ont pratiquement éliminé tout enseignement sur les réels. Or, la présence de tels nombres, tout au moins d'un sur-ensemble de l'ensemble des nombres rationnels, est nécessaire pour la réalisation de nombreuses tâches et techniques du mathématicien, de l'ingénieur comme de l'élève de la fin du collège ou du début du lycée.

En fait, les questions de savoir quel concept de nombre réel il est nécessaire, souhaitable ou possible d'introduire au niveau d'enseignement envisagé, et quels milieux permettent de construire un tel concept continuent de se poser avec acuité. J'ai ainsi étudié plus précisément les choix transpositifs actuels et anciens, les organisations mathématiques et didactiques relativement au domaine numérique dans les institutions d'enseignement, et les systèmes de conditions et de contraintes qui pèsent sur les sujets et les institutions d'enseignement à propos du « numérique ».

3. Un espace de nombres à construire

Dans la période actuelle, les travaux numériques de la classe de sixième se fondent sur l'ensemble des nombres décimaux, et cela dès l'usage de la division, faisant sortir en quelque sorte de cet espace sensible pour les élèves ; en géométrie, dès la classe de quatrième, l'utilisation du théorème de Pythagore conduit à des nombres irrationnels ; les équations du second degré en algèbre dans la classe de troisième font surgir des racines carrées irrationnelles ; en analyse on travaille implicitement sur des intervalles de $\mathbb{R}$; et en statistiques et probabilités certains modèles font intervenir des irrationnels. Dans toutes les organisations mathématiques mettant en jeu ces objets, soit les tâches et les techniques portent directement sur des irrationnels (calcul d'approximations de π par exemple), soit les tâches et les techniques font intervenir inévitablement des irrationnels. Ainsi les travaux mathématiques dans l'enseignement secondaire nécessitent d'introduire des nombres non décimaux et même non rationnels, autrement dit un espace numérique plus large que l'ensemble des nombres rationnels. Le moment institutionnel de la transition collège–lycée me servira de point d'entrée pour analyser les rapports personnels et institutionnels, actuels ou anciens, à l'objet nombre réel dans l'enseignement secondaire et pour étudier les organisations didactiques (Chevallard 1999), tout au moins les milieux possibles, permettant la mise en place des organisations mathématiques visées. J'examinerai la place et le rôle des nombres décimaux et des nombres rationnels dans ces praxéologies (Chevallard 1999). Mon propos est notamment de montrer les fluctuations importantes des choix quant à cette place et à ce rôle à certaines périodes et de mettre en évidence quelques phénomènes curriculaires dans l'*institution EMS.*

4. Les grandes structures du numérique depuis un siècle et demi

Je porte un regard sur l'enseignement du numérique depuis un siècle et demi à travers ce qui fait la *mémoire* ***de l'institution : les programmes, les instructions et les manuels.*** Si cette histoire nous était contée par *le sujet noosphérien* de l'institution (Chevallard 1985), il pourrait évoquer trois grandes *structures du numérique* qu'il a essayé de faire vivre :

- à l'aide d'un environnement technologico-théorique (Chevallard 1999) se fondant sur une théorie de la mesure et des grandeurs incommensurables, et ce sera la période classique (1854-1947)
- à l'aide d'un ensemble structuré à partir des développements décimaux comme pendant la réforme des mathématiques modernes (1968-1978)
- ou encore à travers un ensemble flou ou un ensemble « fourre-tout », contenant tout nombre se présentant dans le travail, comme dans les périodes suivant la réforme des mathématiques modernes (de 1978 à 1996).

Après avoir caractérisé les trois grandes structures précédentes, j'étudie ensuite les choix de ce sujet noosphérien pour le numérique dans la période actuelle dont les nouveaux programmes ont été mis en place en sixième en 1996, puis en lycée en 2000 (pour la classe de seconde).

4.1. Une théorie de la mesure des grandeurs : la période classique (1854-1947)

Les objets du numérique sont stabilisés à cette époque et ont pour adresse « L'arithmétique ». Une organisation assez rigide apparaît avec seulement quelques variations sur la place de certains thèmes. Les auteurs de « traités d'arithmétique » suivent une progression relativement identique comme le montrent les sommaires des ouvrages de cette époque[2]. *Le temps de l'institution* est rythmé par l'introduction d'objets du numérique en lien avec des thèmes et sujets (Chevallard 2002b) dans l'ordre suivant :

[2] On trouve notamment cette organisation dans les manuels suivants :
Cours Complet d'Arithmétique à l'usage des lycées et collèges, A. Guilmin,Auguste Durand, Paris, 1855
Traité d'Arithmétique,R.P. Faton,Gauthier-Villars, Paris, 1866
Cours d'Arithmétique théorique et pratique à l'usage des lycées et collèges, F. Girod,E. André Fils, Paris, 1903

Entiers, la numération décimale et les quatre opérations, la divisibilité → Fractions ordinaires et opérations → Fractions décimales, opérations et système métrique → Racines carrées → Racines cubiques et racines n$^{\text{èmes}}$ → Les nombres incommensurables → Rapports de deux nombres ou deux grandeurs et applications de l'arithmétique → Logarithme.

Ce que ne laisse pas apparaître cette ossature, c'est la construction et le ciment de l'organisation mathématique de cette période. En fait, elle va se fonder sur « une théorie » de la mesure des grandeurs. À cette période classique, une problématique de la mesure est sous-jacente à la construction du numérique et elle est affichée en général dès le début des ouvrages d'arithmétique :

> « Mesurer une grandeur, c'est s'en faire une idée précise en la comparant à une autre grandeur de même espèce, que l'on connaît. […] Le résultat de la comparaison d'une grandeur à son unité s'exprime par un nombre. » (Guilmin 1855)

Elle aboutit à trois éventualités en lien avec certains types de nombres ou de grandeurs :

- des nombres entiers « quand une grandeur se compose exactement de l'unité répétée un certain nombre de fois » ;
- des nombres fractionnaires « quand une grandeur se trouve composée d'un certain nombre d'unités, plus une fraction moindre que l'unité » ;
- quand une grandeur ne rentre pas dans l'un des deux cas précédents, « on dit alors que la grandeur est incommensurable avec cette unité : elle ne peut être mesurée qu'approximativement avec cette unité ».

En fait cette problématique de la mesure des grandeurs fait à la fois partie de l'organisation mathématique, tout autant que de l'organisation didactique, elle va permettre la constitution de milieux pour la construction des nombres. Elle est toujours présente en « toile de fond » à cette époque. Par exemple, pour le traitement des nombres fractionnaires, Neveu (1915) y fait constamment référence :

> « On peut toujours supposer qu'un nombre fractionnaire, quelle que soit la nature qui lui a donné naissance, soit la mesure d'une longueur »

ou encore

> « Deux nombres fractionnaires sont égaux lorsqu'ils mesurent la même longueur ou des longueurs égales, ces longueurs étant mesurées avec la même unité ».

Cours d'Arithmétique à l'usage des écoles primaires supérieures, des écoles normales, et des candidats aux écoles nationales d'arts et métiers, H. Neveu, Masson, Paris, 1915

La dernière éventualité évoquée dans la définition de la problématique donne naissance aux nombres incommensurables par l'intermédiaire d'un autre objet : la racine carrée. À partir de l'espace ancien constitué par les nombres fractionnaires, l'objet « racine carrée » s'impose sous la forme d'un algorithme analogue à celui de la division, technique permettant d'obtenir des valeurs approchées de racines carrées, dite « méthode d'extraction ». Cet objet conduit à une première extension de l'espace numérique sous les traits des *racines carrées incommensurables* :

> « Quand la racine carrée d'un nombre entier, tel que 42, n'est pas un nombre entier, elle n'est pas non plus un nombre fractionnaire […]. $\sqrt{42}$ est ce qu'on appelle un nombre incommensurable, c'est-à-dire qu'il n'a pas de commune mesure avec l'unité. Une pareille racine ne peut être évaluée que par approximation. » (Guilmin 1855)

Pour produire l'extension recherchée de l'espace numérique en complétant l'espace des nombres fractionnaires par *les nombres incommensurables*, une autre signification de la racine d'un nombre A est obtenue. $\sqrt{A}$ apparaît comme la limite des racines carrées $\frac{a_n}{n}$ approchées à 1/n près (C.Vacquant et A. Macé de Lépinay[3] 1917) :

$$\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 \leq A < \left(\frac{a_n + 1}{n}\right)^2 \text{, où } a_n \text{ est entier.}$$

Cette signification est généralisée à d'autres mesures, par l'intermédiaire d'une droite graphique pour introduire des nombres incommensurables, qui correspondent à des longueurs n'ayant aucune commune mesure avec l'unité (Girod 1903). On utilise même cette signification pour étendre aussi les opérations. Les techniques correspondant aux cinq opérations de l'arithmétique ne seront pas vraiment élaborées, mais on montre quelques exemples dans le cadre d'une pratique de calcul approché :

> « On peut avoir à effectuer sur les nombres incommensurables, les mêmes opérations que sur les nombres entiers ou fractionnaires, que l'on appelle par opposition aux premiers, nombres commensurables » (Girod, 1903)

Les auteurs proposent des approximations rationnelles ou décimales de nombres irrationnels comme :

$\sqrt{13 + \sqrt{21}} = \frac{37}{9}$ à moins de $\frac{1}{9}$ près ou $\sqrt{23 + \sqrt{32}} = 5{,}35$ à moins de $\frac{1}{100}$ près (Girod 1903).

Cette pratique de l'approximation prend une place particulière dans cette construction du numérique :

[3] Éléments de Géométrie, C.Vacquant et A. Macé de Lépinay, Masson, 1917.

> « En vertu de ces définitions, le calcul des nombres incommensurables se ramène toujours à un calcul de nombres commensurables et ne présente d'autres difficultés que la question d'approximation » (Girod 1903).

L'organisation du numérique n'aboutit pas à la construction d'un système de nombres englobant tous les types de nombres, sur lequel on dispose d'opérations internes agissant indépendamment de la nature des nombres. On a plutôt ici une réunion de familles de nombres, l'ensemble des entiers, l'ensemble des rationnels positifs inférieurs à l'unité (appelés parfois fractions), l'ensemble des nombres rationnels positifs non entiers (appelés parfois nombres fractionnaires) et une autre famille contenant les racines incommensurables.

Ainsi l'idée de nombre à cette époque s'appuie sur celle de *mesure d'une grandeur*, appuyée par une approche analytique pour introduire les *nombres incommensurables*. Malgré une adaptation numérique aux évolutions des savoirs des mathématiciens, on peut souligner ici la filiation avec l'exposé euclidien des *Eléments* dont les traces remontent à plus de vingt-trois siècles.

4.2. Un ensemble structuré à partir des développements décimaux : La période de la réforme des mathématiques modernes (1968-1978)

Cette période sanctionne une évolution de la constitution du numérique dans l'institution EMS en réduisant le plus tôt possible et au plus près la distance avec le savoir mathématique de référence. Elle s'inscrit dans un courant structuraliste plus général.

L'organisation mathématique du numérique est bâtie sur de nouvelles fondations dont le socle lui-même est constitué par les nombres décimaux. L'institution met en scène un objet, peu présent dans les périodes précédentes : l'idécimalité. J'ai proposé ce néologisme pour désigner le caractère non-décimal de certains nombres comme on le fait depuis des siècles pour l'irrationalité. Il s'agit aussi de pointer ce caractère particulier de la construction du numérique de cette époque qui conduit à donner un rôle fondamental à des nombres qui restent souvent dans l'ombre : les nombres non-décimaux que j'appelle *les nombres idécimaux*. En effet, ces nombres vivent à cette époque un destin particulier dans la mise en place des nombres réels dès la classe de quatrième, sous la forme des suites décimales illimitées. C'est une caractéristique de *l'environnement technologico-théorique* du numérique et de l'organisation didactique, ce qui restera original dans cette épistémologie scolaire du numérique.

Les nouveaux programmes (arrêté du 22 juillet 1971) demandent d'introduire les nombres réels dès la classe de quatrième en suivant un plan précis d'enseignement. Avant d'aborder les propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient), nous relevons :

- la consolidation de l'étude de l'anneau ordonné des nombres décimaux ;

• un travail d'approximation, basé sur les encadrements par des décimaux « successifs » des différents ensembles de décimaux $\mathbb{D}_p$, de sommes, produits, inverses et racines carrées de décimaux ;

• l'introduction des suites décimales illimitées ;

• l'étude des propriétés structurelles de l'ensemble des réels (dont la notion de quotient).

L'institution EMS se démarque des constructions savantes à l'honneur à cette époque - à savoir les suites de Cauchy dans l'esprit de la construction de Cantor ou les coupures de Dedekind. Elle propose une voie qui semble plus naturelle par rapport à l'idée d'approximation et par rapport aux fondations basées sur l'ensemble des décimaux. Il est ainsi suggéré de montrer la nécessité d'introduire des nombres idécimaux. Cette nécessité est notamment motivée par deux problèmes :

a) Le premier est celui de la recherche de l'inverse d'un décimal strictement positif dans le cas où cet inverse n'est pas décimal. Par exemple, le manuel de la collection Queysanne-Revuz[4] propose le problème de la recherche de l'inverse de 12 et de 0,37 et aboutit à la conclusion : « il n'existe pas de décimal x tel que : 12x=1. La division avec virgule de 1 par 12, poursuivie indéfiniment, fournit *une écriture décimale illimitée* : 0,083333… ». Ce problème permet aux auteurs d'introduire la suite décimale illimitée 0,083333… .

b) Le second problème suggéré par le programme est celui de l'existence de la racine carrée de certains nombres décimaux. Les auteurs précédents proposent la recherche *des racines carrées à* 10^{-n} *respectivement par défaut et par excès* du nombre 6. Cette activité conduit à mettre en évidence, d'une part *une écriture décimale illimitée* (dont les auteurs demandent d'admettre qu'elle n'est pas périodique), et d'autre part *une suite d'intervalles emboîtés qui n'ont en commun aucun point de* $\mathbb{D}$.

Les deux problèmes sont réunis pour une cause commune, la motivation à faire émerger de nouveaux nombres : les nombres idécimaux. Dans cette organisation mathématique du numérique, la racine carrée est toujours présente. Elle est reliée au quotient pour faire « découvrir » des nombres idécimaux. Néanmoins son rôle est minoré.

Ainsi, dans cette période des mathématiques modernes, l'institution propose une nouvelle épistémologie scolaire des nombres réels basée sur *la complémentarité décimal/idécimal* et sur une présentation des nombres réels sous forme de suites décimales illimitées. Cette problématique est bien différente de celle de toutes les périodes précédentes : $\mathbb{R}$ se construit, non plus par rapport à $\mathbb{Q}$, mais en opposition à $\mathbb{D}$, tout en le prolongeant. La complémentarité rationnel/irrationnel des périodes précédentes s'efface pour laisser la place à une opposition décimal/idécimal, ou du moins, à une extension du système

[4] Mathématiques, Classe de Quatrième, collection Queysanne-Revuz, Série rouge, Nathan, 1973.

des nombres décimaux. La plupart des manuels de troisième ne citent même plus le terme « irrationnel » dans la séquence sur la racine carrée, mais se placent dans le nouvel environnement technologico-théorique mis en place pour les réels : les approximations décimales et les écritures décimales illimitées.

4.3. Un ensemble « fourre-tout » et une droite de nombres : les périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes (1978-1985 et 1985-1996)

À partir de 1978, année à partir de laquelle se « referme » la réforme des mathématiques modernes, se dessine déjà un changement de problématique modifiant complètement le rapport de l'institution au numérique. La réforme de 1978 s'inscrit dans un mouvement général de recul de la théorie élémentaire des ensembles, des relations et des structures. Le symptôme de ce changement se situe en classe de quatrième dans laquelle le numérique apparaît à l'adresse « Calcul numérique ». Le long paragraphe des programmes de 1971 intitulé « Nombres décimaux et approche des réels » est remplacé par un paragraphe exigu laissant apparaître la lapidaire expression « pratique des opérations sur les rationnels, sur les réels » (Arrêté du 16 novembre 1978). Pour ce qui est spécifique des réels, la seule instruction se réduit à la description suivante :

> « Pour $\mathbb{R}$ il suffit que les élèves sachent qu'il s'agit, suivant la présentation adoptée, d'un sur-ensemble de $\mathbb{D}$ ou de $\mathbb{Q}$ sur lequel l'addition, la multiplication, la relation d'ordre se prolongent en disposant des mêmes propriétés, et que tout élément positif de $\mathbb{R}$ admet une racine carrée. »

Les conséquences de cette évolution du numérique, évidé en quelque sorte, conduisent à observer dans les manuels une grande variété d'organisations mathématiques. L'objet « nombre réel » est notamment présenté sous des formes très différentes selon les manuels :

- Introduction par les développements décimaux illimités dans la continuité de la période précédente avec un formalisme moindre (Monge 1978) ;
- Introduction par la problématique de la mesure des longueurs où le nombre apparaît comme le résultat d'une mesure (Maugin 1979) ;
- Introduction s'appuyant sur la droite graduée où les nombres sont utilisés pour repérer les points d'une droite (Deledicq 1983).

Dans la période suivante, la réforme commencée en classe de sixième à la rentrée 1986 (Arrêté du 14 novembre 1985) « dilue » le numérique dans le domaine étiqueté par l'institution « Travaux numériques », reléguant à l'histoire la traditionnelle répartition arithmétique - algèbre. Le numérique est construit à travers une perspective essentiellement algébrique dissociée de la mesure des grandeurs. Le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres décimaux est déclaré avec un statut de nombre à partir de la définition comme « le nombre qui multiplié par b donne a » (B.O. du 30-7-87). L'objet racine carrée s'inscrit dans ce cadre comme algorithme de calcul - « touche √ de la calculatrice » - en quatrième, puis comme opérateur algébrique (lié à l'opérateur carré) et comme symbole « radicaux » permettant de traduire des relations entre des nombres. L'étude de la nature des racines carrées, de l'irrationalité et de l'idécimalité sont absents des programmes comme de la plupart des manuels. La problématique d'extension des systèmes de nombres, apparue dans les années soixante, disparaît dans cette période. Il est ainsi assez rare en classe de troisième de voir le mot « irrationnel » dans la séquence sur l'objet « racine carrée ». Il peut figurer mais il est rarement institutionnalisé et prend plutôt un caractère exotique. En fait, au lieu de traiter vraiment ces problèmes de nature arithmétique, les agents - auteurs de manuels - vont les déplacer vers un autre problème, différent mais intimement lié, celui de la différenciation « valeur exacte/valeur approchée ».

La classe de seconde, au lycée, confirme le peu d'attention aux systèmes de nombres : « S'ajoutent en seconde […] les notations $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$; sur ces différents points, il s'agit d'un simple vocabulaire et aucun développement n'est au programme » (arrêté du 25 avril 1990). Dans les manuels, l'ensemble $\mathbb{R}$ apparaît comme *« un grand fourre-tout »*[5] qui s'élabore sur une notion préconstruite de « nombre » indépendant de sa nature arithmétique, et pour lequel les règles de calcul vont être officialisées une fois pour toutes, la nature des nombres étant mise à l'écart. L'unité de ce réservoir de nombres que constitue $\mathbb{R}$ est obtenue à l'aide de la représentation par la droite numérique : « nous pouvons représenter géométriquement tous les nombres réels : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée » (Terracher et al, 1994).

4.4. Le timide retour de l'arithmétique et la perturbation technologique de la classe de seconde : la période actuelle (1996-2004)

Les choix noosphériens pour la structure du numérique dans la période actuelle s'inscrivent globalement dans la structure de « *fourre-tout* » vue à la période précédente où la droite reste le modèle global de l'ensemble $\mathbb{R}$..

Dans les nouveaux programmes mis en place à partir de la sixième en 1996, puis en seconde en 2000 et enfin en terminale en 2002, un timide retour de l'arithmétique en troisième (1999) peut être repéré par l'intermédiaire d'un thème nouveau « Nombres entiers et rationnels » et par les objets « diviseurs communs à deux entiers » et « fraction irréductible ». L'organisation de ce thème en troisième n'est pas sans surprendre avec la présence, voire l'opposition, de deux blocs : un bloc pratico-technique bien identifié autour des types de tâches :

> « Déterminer si une fraction est irréductible ;
>
> Simplifier une fraction ;
>
> Déterminer si deux entiers sont premiers entre eux. »

[5] Selon l'expression des auteurs du manuel Hachette pour la classe de seconde (1994).

et un bloc technologique constitué autour de la nature des nombres qui semble relever de la culture plus que de compétences réelles à mettre en place :

> « une première synthèse sur les nombres, intéressante tant du point de vue de l'histoire des mathématiques que pour la culture générale des élèves. »

ou encore :

> « À côté des nombres rationnels, on rencontre au collège des nombres irrationnels comme π et $\sqrt{2}$. On pourra éventuellement démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Une telle étude peut également être mise à profit pour bien distinguer le calcul exact et le calcul approché. »

Il s'agit d'une suggestion plutôt que d'une injonction forte de développement sur la nature des nombres et la structure des ensembles de nombres. Ces conditions nouvelles, offertes à l'enseignement du numérique, conduisent actuellement à peu de changements sur le domaine numérique et aucune variation effective sur les organisations mathématiques et didactiques ne peut être repérée. Les manuels de troisième, tout au moins, laissent apparaître une conformité des plus strictes avec les programmes. L'espace est envahi par une praxéologie locale constituée par les types de tâches citées précédemment et une technologie basée sur les propriétés des notions de « diviseurs communs à deux entiers » et de « PGCD ». Le travail évoqué sur la nature des nombres ou les ensembles de nombres se réduit souvent en une activité dirigée à propos de l'irrationalité du mythique nombre $\sqrt{2}$ ou en une annonce culturelle sur l'histoire de ce nombre.

En classe de seconde, l'institution demande un travail à propos du numérique qui ne se résume plus aux simples notations des systèmes de nombres, lesquelles fixaient les limites de l'étude des périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes (1978 - 1996). Si l'objectif affiché par les programmes est d' « Approfondir la connaissance des différents types de nombres », on ne précise cependant qu'un seul thème d'étude « Nature et écriture des nombres », sans expliciter la praxéologie correspondante. Le seul type de tâches déclaré officiellement est « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées ». L'évolution technologique aidant, l'institution suggère aussi un travail en lien avec la calculatrice, sur les représentations des nombres dans une calculatrice et les limites de celle-ci. Comme pour la classe de troisième, ces changements ne vont pas bouleverser la structure de l'organisation mathématique du numérique en classe de seconde, mais deux thèmes nouveaux viendront se greffer dans l'organisation ancienne autour des deux types de tâches : « reconnaître la nature d'un nombre » et « distinguer un nombre d'une de ses valeurs approchées ». Les praxéologies ne seront pas très développées comme on peut le voir dans la plupart des manuels. Une technique pourra être ébauchée parfois : « Pour reconnaître la nature d'un nombre, on commence par l'écrire le plus simplement possible » (Malaval et al, Math 2^{e} , Hyperbole, Nathan, 2000, p 49). La technologie se limite en général aux définitions des différents types de nombres, de sorte que ces types de tâches devraient rester problématiques pour les élèves. Cependant une praxéologie pourrait être développée davantage dans les classes où le professeur mettra en place des activités liées à un thème d'étude[6] (optionnel) de la classe de seconde sur les développements décimaux. En effet, une des 9 propositions de thèmes d'étude est la suivante : « *Caractérisation des éléments de* ***D*** *et de* ***Q****, soit en terme de développement décimal fini ou périodique, soit comme quotient irréductible d'entiers (le dénominateur étant ou non de la forme* $2^p x 5^q$*).* »

4.5. Quelques phénomènes curriculaires à propos du numérique

On peut voir l'étude présentée dans cette section comme celle de l'histoire de l'institution EMS aux prises avec divers obstacles, et celle de ses errements dans les choix des organisations mathématiques et didactiques à propos du numérique. Cette étude me permet de souligner quelques phénomènes curriculaires dont certains sont spécifiques du numérique.

4.5.1. La péjoration de l'ensemble $\mathbb{D}$

L'ensemble $\mathbb{D}$ n'a jamais eu une place centrale dans les programmes après la réforme des mathématiques modernes, il est même oublié dans les programmes des périodes de fermeture. On peut trouver une origine de ce phénomène dans la place que tiennent les nombres décimaux dans les institutions universitaires, et de ce fait, il en est de même pour les idécimaux. La « qualité » de $\mathbb{Q}$ d'être un corps contrairement à $\mathbb{D}$, peut être une raison de cette péjoration de l'étude et de la place des nombres décimaux dans l'institution universitaire, et par voie de conséquence, dans l'institution d'enseignement secondaire. L'introduction précoce à l'école élémentaire[7], l'utilisation importante des nombres décimaux dans les pratiques sociales et dans les applications numériques de divers domaines scientifiques et sociaux n'en font plus un objet sensible d'enseignement en fin de collège et au lycée.

4.5.2. Le vide didactique institutionnel

Cette analyse des organisations du numérique m'a amené à proposer la notion de *vide didactique institutionnel* (A. Bronner 1997) pour caractériser les périodes de fermeture de la réforme des mathématiques modernes et la période actuelle (mais dans une moindre mesure), relativement au problème de l'extension de l'ensemble des nombres et du calcul des nombres décimaux ou rationnels aux nombres réels. Alors qu'un plan précis d'enseignement et une signification précise de la notion de nombre réel étaient proposés pendant la période des mathématiques modernes, on ne trouve guère d'instructions à propos des nombres réels dans les périodes suivantes.

A partir de 1978, sur une idée assez vague de « nombre » et sur les fondations structurées autour des nombres décimaux, l'organisation du numérique est mise en place selon une problématique que j'ai qualifiée d'algébrique. La période (1986-1996) amplifie le

[6] *Pour chacun des chapitres, le professeur choisira, pour l'ensemble des élèves ou pour certains seulement en fonction de leurs centres d'intérêt, un ou plusieurs thèmes d'étude dans la liste ci-dessous* (Ministère de l'Education National, Classe de seconde, arrêté du 4 août 1999).
[7] Officiellement en classe de CM1 en France (élèves d'âge moyen de 9 ans).

phénomène de *vide didactique institutionnel* pour l'objet « nombre réel » : la quête des réels qui était un but dans l'organisation de la période classique - sous les traits des incommensurables - puis un fondement dans la période des mathématiques modernes, n'apparaît plus au collège comme au lycée. Les problèmes d'enseignement et d'apprentissage, engendrés par la réforme, sont réglés par ce vide laissant aux enseignants la responsabilité complète d'une transposition des nombres réels en classe.

Nous avons perçu des indices d'une évolution possible du numérique à partir de 1996. On peut se poser la question de savoir quelles sont les raisons d'être des nouveaux thèmes d'études à propos des nombres dans la période actuelle. Est-ce la perception d'un vide sur le numérique par rapport aux besoins mathématiques ? Et il s'agirait alors de combler une partie du vide institutionnel que j'ai pointé dans les périodes de fermeture de la réforme. Est-ce une motivation liée à l'utilisation des moyens de calcul, et notamment l'utilisation de la calculatrice, qui est soulignée dans les trois colonnes du bandeau de programme ? Il s'agirait alors de proposer une technologie permettant de traiter les thèmes liant nombres, calcul et calculatrices. Les documents d'accompagnement insistent largement sur ce sujet (mars 2001).

5. Une classification des rapports personnels d'élèves à l'objet « nombre réel »

L'étude précédente a permis de préciser les conditions et les contraintes dans lesquelles se construisent les connaissances des sujets en position « élève » relativement au numérique. Pour étudier plus précisément les rapports personnels des élèves j'ai construit une typologie en grandes catégories (Bronner 1997) :

- Le modèle carré parfait CP
- Le modèle Conception formelle CF
- Le modèle Carré Parfait et Négatifs CP-N
- Le modèle approximation CA ≈
- Le modèle approximation CA
- Le modèle CN

Ces modèles ont été développés dans d'autres publications (Bronner, Chapitre 3.A, 1997) et j'ai exposé l'utilisation de la classification pour caractériser des connaissances d'élèves ou d'étudiants de différents niveaux de classes (Ibid). Je décris ici succinctement quelques modèles principaux.

Le modèle "Carré Parfait" (CP)

Dans le modèle CP, seuls sont acceptés comme nombres les entiers et les décimaux et éventuellement les rationnels (ou du moins les quotients d'entiers écrits sous forme fractionnaire). Dans un fonctionnement d'élève conforme à ce modèle se dégage un espace numérique basé sur le système de nombres noté SN tel que : SN = $\mathbb{D}$ ou SN = $\mathbb{Q}$, et $\sqrt{a}$ doit être un nombre positif de SN. La racine carrée apparaît comme une application √ : C ----> SN de l'ensemble des carrés parfaits à valeurs dans le système de nombres ; autrement dit C = $\mathbb{D}^2$ ou C = $\mathbb{Q}^2$.

Dans ce modèle, on a le théorème : "Pour a ∈ SN, $\sqrt{a}$ existe si et seulement si a est carré parfait". De même la conservation de la nature du nombre et de son écriture par les opérations et l'opérateur racine carrée sont des théorèmes dans ce modèle.

On a aussi les règles (correctes) :

si a est un nombre positif de SN, $\sqrt{a^2} = a$,

et plus spécifiquement pour les fractions : pour p et q entiers positifs (q non nul)

$$\sqrt{\left(\frac{p}{q}\right)^2} = \frac{p}{q} \quad ,$$

et aussi, pour a et b dans le système de nombres SN et carrés parfaits (b non nul):

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \; ; \; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} .$$

Le modèle Formel (CF)

Dans ce modèle, le système de nombres SN est toujours $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$, et seuls les entiers, les décimaux et les rationnels ont le statut de nombre. Les racines carrées $\sqrt{a}$ - notamment pour a non carré parfait - sont considérées comme des expressions formelles ou des artifices de calcul utilisés dans des transformations algébriques. Les règles de calcul sont considérées comme des règles de transformation des écritures formelles :

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \; ; \; \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \; ; \sqrt{a^2} = a.$$

Plus généralement, ce type de rapport conduit à travailler dans l'algèbre des radicaux avec des règles de transformation des écritures. Il en est de même avec les fractions. Ce type de rapport personnel peut conduire à des énoncés ou techniques non conformes aux règles mathématiques.

Les modèles Approximation CA et CA≈

L'objet racine carrée se présente sous l'aspect d'un algorithme "racine carrée" :

√ (cal) : a -------> c où c est la valeur approchée lue à la calculatrice.

C'est le cas en classe de quatrième en France actuellement.

Un rapport au nombre de type CA≈ se caractérise par le fait que les nombres obtenus avec les quatre opérations et les opérateurs racine carrée, cosinus, …, ne sont pas assimilés aux valeurs approchées - notamment celles obtenues à l'aide de la calculatrice. La différenciation valeurs exactes/valeurs approchées est effective. Dans ce type de rapport personnel au numérique, l'espace numérique peut être réduit à une partie de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$. Une évolution n'est possible qu'avec la reconnaissance de nombres idécimaux et des nombres irrationnels.

Le modèle CA est un rapport qui est, en quelque sorte, "dégénéré" du rapport CA≈, mais devrait apparaître dans les apprentissages avant le modèle CA≈. L'opérateur racine carrée est assimilé à l'algorithme-opérateur "racine carrée" :

$\sqrt{}$ (cal) : SN_+ ----> $\mathbb{D}_+$.

a ----> c (où c est une valeur approchée lue à la calculatrice).

6. Les enseignants : Entre flottement et frustration

Les sujets « enseignant » de l'institution EMS ne sont pas restés en marge de ce travail et j'ai interrogé la manière dont le *vide didactique* était perçu dans les périodes d'après la réforme des mathématiques modernes par les enseignants, et comment ils le traitaient éventuellement. J'ai ainsi mis en place une méthodologie d'étude à partir de questionnaires et d'entretiens (Bronner 1997 et 1998). Cette étude a conduit à une typologie de positions d'enseignants relativement à l'objet « nombre réel » que je décris brièvement :

- position de conformité stricte ;
- position d'ouverture vers les « nouveaux nombres » ;
- position d'ouverture vers les idécimaux ;
- position d'ouverture assumée vers les irrationnels.

Position de conformité stricte

Cette position se caractérise tout d'abord par l'importance accordée à la maîtrise des savoir-faire basés sur les règles algébriques (comme celles qui sont liées à la racine carrée d'un produit). L'allusion à ce type de travail formel constitue un thème récurrent dans le discours d'un professeur de la classe de troisième tout au long de l'entretien : *" La racine carrée, on est obligé de passer pas mal de temps sur la technique ".* Sans doute, la présence des règles algébriques concernant l'objet « racine carrée » dans les programmes officiels[8] (depuis l'arrêté du 14 novembre 1985) et leur mise en relief dans la « colonne » des compétences exigibles constituent une contrainte forte pour les enseignants.

L'enseignement de la racine carrée par les professeurs relevant de ce positionnement n'est pas lié à une ouverture vers les irrationnels ou une perspective d'approche des nombres

[8] Il est fait référence ici aux programmes et instructions officielles en vigueur au moment des interviews et questionnaires.

réels. Ces enseignants évoquent en général les contraintes institutionnelles plutôt que l'objet de savoir culturel : *« c'est le programme »* disent certains, tandis que d'autres expriment très fort le projet de faire réussir les élèves au Brevet.

Position d'ouverture vers les nouveaux nombres

Ces professeurs souhaitent faire comprendre aux élèves que certaines fractions et racines carrées ont un statut de nombre ; cependant ils ne parlent pas d'irrationalité à propos des racines carrées, ils ne montrent pas que ces racines carrées ne sont pas des nombres décimaux. Les aspects de véritable « nouveau nombre » à caractère irrationnel ou non décimal, ne sont pas explicités dans le discours. Cette position d'ouverture vers les nouveaux nombres peut être interprétée comme une tentative de réduction du vide didactique institutionnel sur les réels, qui maintient quand même une grande conformité avec le rapport institutionnel.

Position d'ouverture vers les nombres idécimaux

Certains enseignants s'imposent d'introduire un travail sur la nature non décimale de certaines racines carrées comme $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{7}$. Ils s'inscrivent dans le prolongement de la position précédente d'ouverture vers des « nouveaux nombres », et essaient de problématiser cet aspect en utilisant l'opposition « décimal-idécimal », laquelle est alors assumée. Ils peuvent se limiter à traduire le phénomène par l'expression : « des nombres qui ne tombent pas juste ». Mais ils peuvent aussi proposer des exercices pour montrer que ces nombres ne sont pas des décimaux, sans toutefois démontrer que ce sont des nombres irrationnels. Ce type de rapport induit encore une position où se négocie une réduction du vide didactique sur les nombres réels, en jouant sur l'opposition décimal-non décimal.

Position d'ouverture vers les nombres irrationnels

Parmi les enseignants ayant répondu aux questionnaires ou interviews, quelques-uns envisagent de présenter explicitement une notion de nombre irrationnel à travers l'enseignement de la racine carrée. Certains introduisent même des connaissances permettant un traitement de l'irrationalité. Pour comprendre les raisons de cette position, on peut avancer le poids culturel de l'irrationalité des racines carrées. Mais il peut aussi y avoir une nécessité didactique de montrer la nature de « nouveau nombre », nécessité qui peut être encore interprétée comme une forme de réponse au vide didactique, en se situant davantage dans la perspective culturelle de l'opposition rationnel-irrationnel.

Quelques effets relevés

Cette investigation m'a permis de relever des conflits internes chez les enseignants dus à plusieurs assujettissements anciens :

« J'étais toujours fascinée pendant mes études par cette façon d'agrandir à chaque fois les ensembles de nombres et d'arriver à trouver les propriétés qui se prolongent. Mais on a du mal à abandonner un certain nombre de choses et on a été formé comme cela. […] Mais c'est vrai qu'au début c'est comme cela qu'on présentait les ensembles de nombres. Maintenant la preuve c'est que je n'y pensais plus. En plus de cela, avec les difficultés que rencontrent les gamins, je crois qu'au fur et à mesure on élague. »

Et finalement même des frustrations :

« On leur inculque des techniques, on perd le raisonnement ; alors évidemment c'est plus concret. On se sert des mathématiques comme des outils. […] J'ai l'impression que je donnerais plus envie aux enfants si je leur posais des choses qui font plus appel à la réflexion qu'à la technique. »

7. Un retour sur le cadre théorique

Mon propos final constitue en quelque sorte une réflexion méta sur ma propre recherche et son cadre théorique. En particulier je m'interroge sur cette inflexion qui m'a conduit à me placer dans le cadre développé par Chevallard (1992) à l'époque de mes premiers travaux de thèse. Ai-je cédé à une mode naissante dans la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques ? Est-ce le genre qu'il fallait prendre à ce moment de l'histoire de la communauté ? Y avait-il un besoin en acte ressenti ou une raison plus objectivée ? Le moment est propice pour questionner ces parcours de recherche à travers celui que je propose pour cette communication.

Cette analyse des savoirs à enseigner et des savoirs enseignés à diverses époques peut être considérée comme des fragments de la *biographie institutionnelle de l'institution.* En effet, dans l'institution EMS, les objets « nombre réel » et « racine carrée » apparaissent, évoluent et se transforment, deviennent plus ou moins problématiques pour les sujets selon les époques. Cette suite d'objets, de transformations des rapports aux objets, et d'événements qui y sont liés, déterminent une *biographie* comme on peut le faire pour les élèves (Mercier 1992). Les annonces officielles des différentes réformes en constituent les dates « anniversaires » qui rythment *le temps biographique*. Cette étude biographique m'a permis d'accéder à la compréhension de certains faits curriculaires de la période actuelle.

Ainsi, la Théorie Anthropologique du Didactique a été pour moi le cadre de l'étude diachronique d'une communauté de pratiques culturelles, relativement au domaine de savoir « numérique », sous l'angle des invariants et des variations. L'objectif étant de rendre compte et d'expliquer à la fois l'unité, et la diversité mathématique et didactique des pratiques dans leur contexte institutionnel. Ce paradigme s'est imposé à moi comme l'environnement théorique et méthodologique le plus approprié à ce type d'étude par son approche même, dite anthropologique : une approche présentant des outils nécessaires pour l'étude d'une épistémologie des savoirs à enseigner.

L'étude des rapports personnels des élèves et des enseignants a aussi particulièrement motivé le choix de ce cadre d'analyse. J'aurais pu choisir d'autres cadres, en psychologie cognitive, par exemple. L'approche anthropologique m'a permis aussi, me semble-t-il, de mieux intégrer certaines dimensions moins prises en compte dans les autres cadres théoriques, notamment les assujettissements à différentes institutions. Or, comme le précise Chevallard (1989), c'est à travers des assujettissements multiples que se forment les rapports personnels des sujets d'une institution donnée : « C'est par le truchement des institutions que les praxéologies parviennent jusqu'aux personnes, acteurs des institutions : on ne peut comprendre les apprentissages ***personnels*** si l'on ne cherche pas à comprendre les apprentissages ***institutionnels.*** De même, on ne peut comprendre les *échecs* d'apprentissage *personnels* sans prendre en compte les refus ou les impossibilités de connaître de certaines institutions dont la personne est le *sujet.* Il y a, dans la diffusion des connaissances (et des ignorances) et des pratiques (et des incapacités), une *dialectique indépassable entre personnes et institutions* » (Chevallard, 2003) ».

Ces travaux m'ont permis de formuler et de tester des hypothèses sur les conditions d'apprentissage des nombres réels et sur le rôle de la racine carrée et des nombres décimaux dans la réduction des vides didactiques (Bronner 1997). C'est en ce point central que le cadre anthropologique a été mis en connexion avec celui de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1986). C'est ainsi que j'ai conçu une ingénierie pour des moments de premières rencontres privilégiant certaines formes d'organisation didactique : « Par réaction, on peut alors vouloir écarter toute référence à un réel préexistant qu'il s'agirait de reproduire en l'imitant, au profit de la création d'un réel *sui generis*, identifié à un système de situations *fondamentales* (Brousseau 1986), dont l'élève est l'acteur principal, et qui font naître à ses yeux l'organisation mathématique comme ce qui permet de produire une *réponse* à une ou des *questions* déterminées » (Chevallard 1997). Cette articulation essentielle des deux paradigmes demanderait davantage de place pour être développée.

Cette approche a ainsi permis d'étudier plus précisément l'interaction entre les aspects cognitifs et culturels des sujets de EMS en conjuguant les dimensions personnelles et collectives des personnes de EMS ; chaque personne étant considérée comme un sujet d'un groupe culturel à délimitation floue, mais dont les effets et évènements à l'échelle collective et des individus montrent la réalité de cette institution, dénommée EMS. Ainsi ce choix de l'approche anthropologique du didactique a favorisé une mise en cohérence des différentes questions de recherche et des manières de les traiter, notamment cette approche a fourni un cadre cohérent permettant d'étudier autant la variabilité culturelle du numérique mais aussi la variabilité individuelle, à travers une étude synchronique des sujets, dans leurs rapports à des objets du numérique. Cet espace offert dans ce colloque m'a donné l'occasion de mieux objectiver les raisons profondes du choix du cadre théorique anthropologique dans cette étude que j'ai menée, étude de l'homme aux prises avec le numérique.

Bibliographie

Bronner A., (1997), Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée, *Thèse de doctorat*, Université Joseph Fourier de Grenoble, 1997.

Bronner A., (1998), Les rapports d'enseignants de Troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en Didactique des Mathématiques 17(3), numéro spécial de la revue sur l'enseignant*, La pensée sauvage, Grenoble.

Bronner A. (2001), Les nombres réels dans la transition collège – lycée : Rapports institutionnels et milieux pour l'apprentissage, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ARDM et IREM de Paris 7.

Brousseau G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques 7(2)*, La pensée sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2)*,La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur, *Recherches en Didactique des Mathématiques 17(3)*, La Pensée Sauvage

Chevallard, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 19(2).* La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2002a), Organiser l'étude. Cours 1 Structures et fonctions, *Actes de la XIème École de didactique des mathématiques*, Corps, La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2002b), Organiser l'étude. Cours 2 Écologie & régulation, *Actes de la XIème École de didactique des mathématiques*, Corps, La Pensée Sauvage

Chevallard Y. (2003), Didactique et formation des enseignants**,** *Journées d'études INRP-GÉDIAPS, Vingt ans de recherche en didactique de l'Éducation Physique et Sportive à l'INRP (1983-2003).*

Mercier A. (1992), L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique, *Thèse de doctorat*, Université de Bordeaux.