LA TOPOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICA

Marta Bastán[1], Héctor Cuenya [1], Gema Fioriti[2]

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous commençons a étudier la formation du professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire situés dans la Théorie Anthroplogique du Didactique. Nous nous proposons d'identifier les conditions qui pèsent sur la transposition didactique de la topologie dans la formation des professeurs du secondaire en Argentine. Notre objectif est de rendre compte des modèles épistémologiques institutionnels qui se manifestent dans cette organisation didactique et d'analyser comment ils influent sur les praxéologies didactiques que le futur professeur mettra en place.

ABSTRACT

In this work we start to study mathematics teachers' training using the framework of the Anthropological Theory of the Didactics. We show how the didactic transposition occurs at the institution where mathematics teachers are formed. We analyse the institutional epistemological models that appear in this didactic transposition and we analyse its influence on the *didactics praxeologies* that the trained teachers will develop in the future of their practice.

1. INTRODUCCIÓN

Las reformas educativas y el desarrollo logrado por la Didáctica de la Matemática han servido de estímulo para el cambio que moviliza al sistema educativo. En el reparto de responsabilidades entre quienes tienen a su cargo el hacer viables esos cambios ocupan un lugar significativo las instituciones formadoras de los docentes. Desde esa posición analizamos las prácticas que se llevan a cabo en la formación de profesores de matemática.

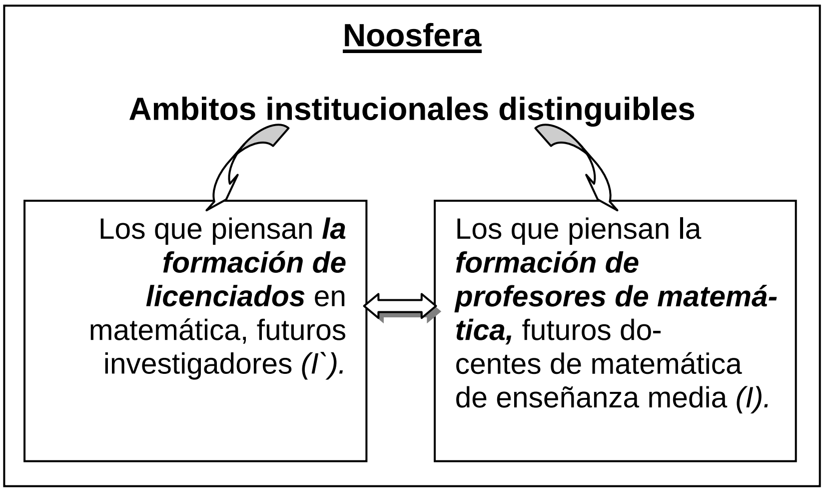
Entendiendo que para reconocer las características particulares de la actividad matemática institucionalizada y las razones que las determinan, es necesario hacerlo desde el ámbito del saber y teniendo como punto de partida la reflexión acerca de la propia práctica profesional, en este trabajo se analiza la Transposición Didáctica de los conceptos comprendidos en la asignatura *Introducción a la Topología* correspondiente al Profesorado de Matemática de la Universidad Nacional de Río Cuarto.

Después de varios años de trabajo como docentes en esta y otras asignaturas hemos observado que se dan ciertas paradojas en la formación de profesores de matemática, por un lado la práctica profesional de los profesores de enseñanza media en matemática tiene requerimientos que no se adquieren en la formación de base de los profesores y por otro la formación de base les provee de ciertos saberes que no son percibidos como necesarios para su práctica. Nos preguntamos acerca de las razones que llevan a esto. Especialmente nos interesa estudiar la incidencia que tiene la institución en la formación de profesores de matemática de enseñanza media. En particular nos interesa analizar el contexto en el que se piensa el desarrollo curricular de la carrera y el marco en que se delimitan las tareas académicas para la formación de profesores.

[1] Dpto. de Matemática. Facultad de Ciencias Exactas. Universidad Nacional de Río Cuarto. Argentina. mbastan@exa.unrc.edu.ar hcuenya@exa.unrecv.edu.ar
[2] Universidad Nacional de General San Martín. Argentina. gfioriti@yahoo.com.ar

Desde la perspectiva antropológica, para comprender los sistemas didácticos se plantea la necesidad de analizar la *noosfera*[3] *del Sistema de Enseñanza de la Matemática* (SEM).

En nuestro caso distinguimos en la noosfera dos ámbitos institucionales diferentes *I* e *I'* que operan sistemáticamente, de manera simultánea y con criterios muchas veces contrapuestos: el de la ***formación de Licenciados en Matemática*** (*I'*) quienes luego devienen en investigadores de la ciencia matemática y el de la ***formación de Profesores de Matemática*** (*I*) cuya especificidad es la docencia en la escuela media.



Estos ámbitos conviven e interactúan permanentemente dado que ambas carreras mantienen dos años en común y que los alumnos de la Licenciatura han sido previamente, en su mayoría, alumnos del Profesorado. El contexto institucional de la carrera de profesores de matemática está impregnado de decisiones curriculares y académicas en las que se muestran estas interacciones.

Entendemos que la transposición didáctica de las asignaturas que conforman la carrera de *Profesorado de Matemática para la enseñanza media* son una expresión del modelo epistemológico dominante en *I*, del que, en cada asignatura, es posible observar rasgos característicos. En este trabajo se estudian las condiciones de existencia de los conceptos topológicos en *I*

Desde la hipótesis básica de la (TAD) respecto a la *despersonalización de la problemática didáctica,* se asume que es a nivel institucional, mas que individual, donde se configuran las maneras de entender su enseñanza. Las relaciones que el docente establece con un saber determinado y las propuestas que genera para su enseñanza no dependen sólo de sí mismo, naturalmente dependen de las características epistemológicas del conocimiento en cuestión y fundamentalmente dependen del entorno institucional en el que se plantea la reconstrucción de tales nociones.

[3] La *noosfera,* definida por Chevallard (1985) designa al ámbito en que se piensan los sistemas didácticos. Está constituida por los funcionarios del sistema de enseñanza, docentes, científicos, especialistas, que actúan sobre la problemática de la enseñanza.

En este sentido tanto para la realización de un diagnóstico de situación como para la reformulación de los procesos de transposición didáctica se requiere analizar los condicionantes institucionales que operan sobre ellos. Es así que nos propusimos:

Objetivo General	Identificar las condiciones a las que está sometida la transposición didáctica de las *Organizaciones Matemáticas Topológicas*, con especial referencia a la población del Profesorado de Matemática en la Universidad Nacional de Río Cuarto, analizando los condicionantes institucionales en términos de *modelos epistemológicos institucionales* y de *modelos docentes* [4]

Entendemos que el punto de partida de toda cuestión didáctica requiere de una toma de posición epistemológica relativa al objeto de conocimiento para lo cual realizamos previamente un análisis histórico-epistemológico de las nociones topológicas para dar respuesta a las siguientes cuestiones:

¿Qué es la Topología?
¿Cómo surgen los contenidos topológicos?
¿Qué transformaciones sufrieron y por qué?
¿Qué significan estos contenidos en la matemática actual?

2. ANÁLISIS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICO DE LOS CONTENIDOS TOPOLÓGICOS

El estudio histórico permitió ver, entre otras cuestiones, que el tipo de problemas que dan lugar al surgimiento de los conceptos topológicos y los elementos tecnológico teóricos que permitieron justificarlos se enmarcan esencialmente en dos campos de la matemática. Por un lado determinados conceptos topológicos tienen su génesis en problemas ligados a la Geometría y por otro, quizá la mayor parte, surgen ligados al Análisis Matemático.

Las diferentes bases genéticas plantean campos de problemas diferentes y consiguientemente elementos técnicos, tecnológicos y teóricos diferentes, lo cual da origen a dos vertientes iniciales en la topología que, de acuerdo a la denominación actual, son llamadas respectivamente: ***Topología Combinatoria*** (OM1) que surge a partir de los trabajos de Euler (1736) y ***Topología Conjuntista*** (OM2) cuyo origen es situado por varios autores en los trabajos de Cantor de mediados del siglo XIX.

Respecto a la significatividad de la Topología, en la matemática actual los conceptos topológicos están presentes en todas las áreas. Sería impensable concebir un matemático que desconociera los conceptos básicos de la topología. Si bien hoy el objeto de estudio de la topología se halla dividido en diferentes subdisciplinas o ramas que tienen relativamente poco en común (topología algebraica, topología diferencial, etc.) todas ellas mantienen un tronco teórico común que es lo que hoy constituye la llamada *Topología General,* que comienza a llamarse así desde los primeros textos sobre el tema. Hoy se habla prácticamente en forma

[4] Este análisis toma como marco de referencia los modelos caracterizados por Josep Gascón (2001a).

indistinta de *Topología General* o de *Topología Conjuntista*. Los textos estuvieron destinados especialmente a servir de base para la fundamentación del *análisis matemático moderno*[5].

Es así que la Topología Conjuntista pasa a jugar un papel fundamental en el desarrollo del conocimiento matemático y no ocurre lo mismo con la *Topología Combinatoria,* que no se constituye en una herramienta básica en la construcción o fundamentación del conocimiento matemático con un sentido tan general como el logrado por la Topología Conjuntista. Este carácter asimétrico que presentan ambas topologías en la ciencia matemática como veremos, se manifiesta también en la enseñanza.

La toma de posición epistemológica respecto a lo topológico en la formación de profesores nos lleva a la siguiente pregunta:

3. ¿QUÉ ORGANIZACIÓN MATEMÁTICA DEBERÍA SER RECONSTRUIDA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES RESPECTO DE LA TOPOLOGÍA?

La respuesta a esta cuestión requiere atender a distintos factores, uno de ellos es la representación que los alumnos tienen respecto de la asignatura, quienes manifiestan que es muy costoso su aprendizaje y que no encuentran razones de ser para los saberes abordados y que no logran establecer demasiada vinculación entre la asignatura y su práctica futura.

Nos preguntamos entonces qué hace que una organización matemática (OM) cobre sentido para un alumno del profesorado. Determinamos tres razones esenciales:

Cuestiones que llevan al alumno del Profesorado en Matemática a abocarse al estudio de una organización matemática (OM)	**a.** Que encuentre *razones de ser* para esa OM, es decir, que esta surja como respuesta a cuestiones problemáticas, matemáticas o extra matemáticas. **b.** Que la OM pueda ser abordada desde *los conocimientos* previos adquiridos a lo largo de la carrera. **c.** Que pueda establecer vínculos entre la OM estudiada y las que debe abordar en su *futuro desarrollo profesional.*

Esto nos permite decir qué entendemos por una reconstrucción con sentido de la Topología en *I*. Debería plantear el arribo a los conceptos topológicos a través de praxeologías matemáticas de complejidad creciente[6] que, partiendo de problemas tanto desde la Geometría como del Análisis, hicieran necesaria la modelización topológica. Es decir que las herramientas de la Topología deberían aparecer como las óptimas en *I* para modelizar problemas de ambos campos. Como vimos en el análisis histórico tanto OM1 como OM2 son dos organizaciones que surgen a partir de problemáticas diferentes que requieren de técnicas diferentes y que utilizan elementos tecnológico-teóricos particulares, sin embargo puede observarse que

[5] Uno de los primeros textos es el libro *Topología General* de Kelly (1950 aproximadamente) dice que tiene como objetivo servir como libro de referencia y de texto sobre el tema, comenta en el prefacio que el título debió ser *"Lo que todo joven analista debería saber"*.

[6] Una praxeología matemática de complejidad creciente para la Topología requiere no sólo reconocer la organización matemática regional, sino también describir las organizaciones matemáticas locales que la integran, las relaciones que se establecen entre ellas y las nuevas cuestiones problemáticas que pueden abordarse a partir de la OM regional. (Bosch M., Fonseca C., Gascón J. 2004)

aparecen vinculadas a través de elementos tecnológico-teóricos. Estas vinculaciones hacen suponer que es posible reconstruir, a través del planteo de problemas convenientes, una *Organización Matemática Regional de complejidad creciente* que permita describir, interpretar, relacionar y justificar las diferentes tecnologías de las organizaciones matemáticas que la integran.

¿Por qué entendemos que una organización matemática que integrara estos aspectos cobraría más sentido para los alumnos del Profesorado? Una OMR de este tipo contribuiría en distintos sentidos: en *primer lugar* permitiría dar respuesta a lo requerido en *a, b y c.* Los problemas, seleccionados convenientemente, deben dar respuesta a lo requerido en *a.* Para *b.* sería necesario realizar un replanteo en varias direcciones, entre otras en las asignaturas previas, pero en lo que atañe a la propia asignatura, permitiría incorporar el ámbito de lo geométrico buscando un acceso menos abrupto desde los saberes previos a los topológicos. Por otra parte, dada la mayor proximidad de lo geométrico a la práctica de los futuros profesores, contribuiría también a dar respuesta a *c.* En *segundo lugar* los problemas permitirían hacer vivir lo topológico de manera articulada, no atomizada, lo que cobraría más sentido para un alumno del profesorado.

4. LA TOPOLOGÍA EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Este análisis es realizado a partir del siguiente material empírico: las propuestas curriculares de los docentes de la asignatura en lo últimos tres años, la bibliografía del profesor y los apuntes de clase tanto del docente como de los alumnos.

4.1. La Topología vista desde las propuestas curriculares.

Las observaciones más relevantes realizadas en la OM a enseñar hacen visible un primer recorte de los saberes en el proceso de transposición didáctica

1.- La topología que se presenta como obra a ser estudiada no mantiene la funcionalidad que presenta en la ciencia. La propuesta curricular menciona una suma de resultados aislados dispuestos en unidades que no plantea ni contribuye a una reconstrucción de la topología como una organización matemática en sentido creciente.

2.- Ciertas cuestiones problemáticas necesarias para la construcción del sentido de las organizaciones matemáticas no forman parte explícita de la propuesta para la topología en I. No aparece la propuesta de dar solución a problemas ni matemáticos, ni extra matemáticos. La falta de problemas que sirvan de hilo conductor da lugar a una reconstrucción de organizaciones matemáticas desarticuladas e incompletas, que aparecen como meras elucubraciones teóricas. En el estudio histórico puede verse además cómo determinados problemas topológicos, como es el caso del problema de la aritmetización del continuo, permiten establecer vinculaciones con problemáticas planteadas o planteables en la escuela media.

3.- La curricula de la asignatura hace visible una sola dimensión de los conceptos topológicos. Como vimos, la *Topología Combinatoria* da respuesta a problemas geométricos y la *Topología Conjuntista* a problemas del Análisis Matemático, la curricula abarca organizaciones matemáticas que corresponden a la Topología General que está comprendida dentro de la Topología Conjuntista, en este sentido podemos decir que se propone la reconstrucción de una topología unidimensional que aparece como un *Análisis Generalizado*.

Puede pensarse que la dimensión geométrica de la topología no es abordada porque no interesa a la formación de Profesores, sin embargo basta analizar la significatividad que cobra la Geometría en la escuela media respecto del Análisis Matemático, para interrogarse acerca de cuál dimensión de lo topológico podría resultar más significativa para un Profesor de Matemática.

4.- La propuesta curricular de la topología como un Análisis Matemático Generalizado. Tomando como referencia lo que Chevallard (1989) define como una *actividad de modelización* y la caracterización de Gascón (1994), referida a los diferentes estadios de la modelización matemática, decimos que la topología en *I* es una modelización del Análisis Matemático, a la que llamamos *Análisis Generalizado.* Si bien no es totalmente explícito el trabajo de modelización puede observarse en qué sentido es entendido.

Se destaca que:

- Los teoremas y proposiciones fundamentales son en gran medida generalizaciones de resultados del Análisis Matemático.
- Las organizaciones matemáticas que se construyen son abarcativas de otras OM comprendidas en el Análisis y que en muchos casos mantienen hasta su nombre.
- Aparecen nomenclaturas propias del Análisis como las que se relacionan con límite o continuidad.
- Los elementos tecnológico teóricos hacen uso, parcialmente, de elementos del Análisis.

5.- La topología como Análisis generalizado manifiesta diferencias con él.

Si bien la topología se muestra como una generalización del Análisis en *I*, presenta diferencias significativas con él. En el Análisis el manejo de las técnicas tiene mucho de algorítmico, de maneras de hacer estandarizadas, por el contrario en *Topología* se le asigna un fuerte rol a la construcción de un sistema de prácticas o heurísticas, esencialmente no algorítmicas que conjugan el formalismo con la intuición.

En el Análisis las relaciones entre los saberes y el gráfico mantienen una conjugación permanente que hace al sentido, esto se pierde abruptamente en la Topología en *I* debido esencialmente al recorte institucional.

En Análisis las nociones surgen como modelizaciones de problemas del espacio físico, en la topología como *Análisis Generalizado*, en tanto es una modelización de una modelización, no aparece el correlato con lo físico.

6.- Por qué la Topología en I no es una generalización de la geometría.

- No se generaliza ninguno de los resultados estudiados en geometría.
- Los objetos de los que se habla no son reconocidos como objetos geométricos.
- Los problemas no plantean generalizaciones de problemas estudiados en el ámbito de la geometría.

- Los símbolos no se corresponden con símbolos geométricos.

4.2. La topología vista desde la biblioteca del profesor: los libros de texto.

En tanto los libros de texto son producciones de la noosfera, la selección de textos admitida en *I* permite dar cuenta de lo que la noosfera entiende por *topología* en *I*
Presentamos una síntesis de las principales observaciones realizadas en los libros de texto[7] que permite analizar los grados de completitud de las organizaciones matemáticas que es posible abordar. Se ha observado lo siguiente:

> *i)La topología aparece como un Análisis Generalizado:* En coherencia con las propuestas curriculares también en los textos la topología aparece como un Análisis Generalizado.
>
> *ii)Se advierte una desgeometrización de la topología:* no se modelizan problemas topológicos de naturaleza geométrica.
>
> *iii)Faltan razones de ser para las organizaciones matemáticas:* estas aparecen impuestas y sin más razones que la coherencia lógica que mantienen entre sí. Los tipos de tareas no permiten reconocer los sistemas que son modelizados por la topología.
>
> *iv)El rol asignado a los problemas:* Aparecen al final de cada tema como aplicación, son complejos y aislados, tienen por objetivo hacer que el alumno adquiera heurísticas que tienen que ver con el trabajo en estructuras matemáticas.
>
> *v) Desvalorización de las técnicas.* No se realiza un trabajo de las técnicas de manera que puedan ser reconocidas como tales.
>
> *vi)El momento exploratorio no forma parte de la reconstrucción de la topología que se plantea.*
>
> *vii) El carácter formal del tratamiento de las OM:* En ambos textos las nociones topológicas aparecen en una presentación estructural, en la que el trabajo es esencialmente de tipo tecnológico-teórico.

Estas observaciones hacen visible el *grado de completitud* o mejor de incompletitud de la Topología en los libros de texto. Esto es analizado en función de lo establecido por Bosch, Fonseca y Gascón (2004) respecto al grado de completitud en el proceso de construcción de la OM.

Nos preguntamos a continuación qué ocurre en la enseñanza.

4.3. Análisis de la Organización Didáctica de la Topología en la formación de profesores.

La reconstrucción de la Topología que se realiza en *I* es analizada a partir de diferentes materiales empíricos: Apuntes de clase del docente como indicador de sus decisiones epistemológicas y apuntes de clases de los alumnos como indicador de la OM efectivamente enseñada. Se trata de dar respuesta a la siguiente cuestión:

> *¿Qué reconstrucción de los conceptos topológicos se plantea en la formación de Profesores de Matemática?.*

[7] Los textos seleccionados fueron los siguientes: Libro 1:Topología general. Kelley, J.L. (1955) EUDEBA . Libro2: Fundamentos de Análisis Moderno. Dieudonne J. (1976). Reverté, libros considerados básicos por los docentes.

Para el análisis de las condiciones a que está sometida la enseñanza de los conceptos topológicos, dado lo extenso de la asignatura, se realizan dos estudios diferentes, por un lado un análisis detallado de la *unidad de espacios métricos y topológicos* profundizando en el tipo de problemas que se plantean, las técnicas con que se abordan, las tecnologías con que se justifican y los elementos teóricos en que se basan. Por otro lado, un análisis global de las restantes unidades para describir el tipo de restricciones institucionales que sufre la topología, los problemas que son propuestos y los que podrían serlo en función de los elementos tecnológico-teóricos explicitados.

4.3.1. Análisis puntual de la unidad de espacios métricos

De los apuntes del docente nos abocamos al análisis de las actividades planteadas como *tareas para el alumno*, que agrupamos atendiendo a las que corresponden a un mismo tipo.

Respecto a los tipos de tareas

➢ **T_1: Verificar que ciertos objetos responden al modelo que provee la definición de espacios métricos.**

Probar que los siguientes son espacios métricos

a) *IR^n con la distancia euclídea*: $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ $x = (x_1,....x_n)$ e $y = (y_1,....y_n)$

b) *(IR^n ,d) donde* $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\left|(x_i - y_i)\right|$

c) *IR^n con la siguiente métrica* $d(x,y) = \max_{1\le i\le n}\left|x_i - y_i\right|$

d)

Sea X un conjunto, x , y en X

$$d_i(x,y) = \begin{cases} 0 \ \text{si} \ x = y \\ 1 \ \text{si} \ x \neq y \end{cases}$$

e)

Sea A un conjunto cualquiera y L(A) el conjunto de las funciones acotadas de A en IR. Sean f y g pertenecientes a L(A). La aplicacion $d(f,g) = \sup_{x\in A}\left|f(x) - g(x)\right|$ *es una metrica*

➢ **T_2: Verificar propiedades que se cumplen dentro del modelo.**

Si X es un espacio métrico y $A \subset X$, A finito, entonces X - A es un conjunto abierto.Si A es abierto en el espacio métrico X $\longrightarrow$ $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$ *para cualquier B.*

➢ **T_3: Interpretar expresiones formales en términos del sistema modelizado.**

Sea a Є IR^n verificar que las bolas B(a,1/n) forma un sistema fundamental de entornos de a.

➢ **T_4: Interpretar expresiones formales en términos del sistema modelizado.**

Sea a ∈ IR^n. Demostrar que las bolas B(a, 1/n) forman un sistema fundamental de entornos de a.

Respecto a T_1 su resolución requiere en cada caso verificar que *d* cumple con la definición de distancia pero esto no basta para que cobre sentido una definición tan general de *distancia,* hay ciertos resultados tecnológicos implícitos que el docente supone que quedan a cargo del alumno y que por ende no son explícitados. Si bien las tareas explícitas en cada inciso son las mismas, la construcción del sentido requiere del alumno que: ***T_{11}:*** *Constate que hay al menos una función d que verifica la definición de distancia y que la distancia euclídea conocida hasta el momento por el alumno responden a ella.* ***T_{12}:*** *Reconozca que es posible definir otras distancias sobre IR^n, para todo n.* ***T_{13}:*** *Observe que la noción de distancia es extendida a espacios cuyo conjunto soporte no es ningún IR^n.* La métrica sobre el conjunto de funciones acotadas que aparece como un ejemplo más, algo sofisticado, en realidad debería ser uno de los problemas esenciales de la unidad. Reconocer la necesidad de extender la noción de distancia a espacios donde los “puntos” son funciones hace que cobre sentido dar una definición general de distancia sobre un espacio abstracto. ***T_{14}**: Reconozca que sobre cualquier conjunto es posible definir al menos una distancia* (la discreta).

En **T_2** se encuadran la mayor parte de las tareas planteadas al alumno en esta unidad. Estas actividades parten siempre de un modelo previamente construido y ponen un fuerte énfasis en el trabajo dentro del modelo. Requieren del alumno interpretar expresiones formales en términos modelo considerado, así como reconocer resultados del modelo en los sistemas modelizados. En cantidad, tareas de tipo **T_3** son las menos. Las relaciones entre los sistemas modelizados y los modelos no existen o quedan confundidas. Ello se debe en parte a la no explicitación de las tareas implícitas y a la preeminencia asignada al trabajo dentro del modelo, sin tematizar suficientemente las relaciones y diferencias entre los sistemas modelizados y los modelos respectivos. Por otra parte, en el momento de cursar esta asignatura, el alumno no dispone de un conocimiento suficiente de los sistemas a modelizar que le permita reconocer los alcances, beneficios y limitaciones de la modelización.

Respecto a las técnicas: No son reconocidas como tales. Existe una cierta desvalorización de las técnicas, ello puede observarse a partir de los tipo de problemas que se planten al alumno, son complejos y aislados con la pretensión de desarrollar heurísticas y desalentar las técnicas.

Respecto al logos: Los problemas que se plantean, en general resultan de una gran complejidad para el alumno, tienen el rol de delimitar o complementar algunos aspectos tecnológico-teóricos con la pretensión de construir un lenguaje científico preciso, desvinculado del lenguaje ordinario, sin ambigüedades y no ligado a interpretaciones.

4.3.2. Análisis global de la Organización Didáctica.

El análisis global realizado sobre las restantes unidades que son abordadas tanto en los apuntes del docente como de los alumnos, permite observar los grados de completitud de las organizaciones que conforman la asignatura.

Para el análisis del grado de completitud de la Topología que resulta de la reconstrucción planteada en *I*, tomamos los apuntes de clase de los docentes y de los alumnos. Pudimos observar que:

i) En general las distintas organizaciones matemáticas que forman parte de la organización didáctica aparecen desvinculadas entre sí. En muchos casos no se comprende por qué forman parte de la asignatura como es el caso de la unidad de *Cardinalidad.*

ii) Cada unidad aparece conformada por una colección de organizaciones matemáticas que se vinculan sólo a través del discurso tecnológico-teórico. Se muestran sólo integraciones parciales entre las OM, esto se debe esencialmente a la falta de cuestiones que sirvan de hilo conductor del proceso de integración. Respecto a la unidad de cardinalidad, en el estudio histórico-epistemológico se vio que la vinculación con las restantes unidades se da a partir del *problema de la dimensión*.

iii) Los tipos de tareas que quedan explícitos al alumno son esencialmente de dos clases:

a) Reconocer los elementos tecnológico-teóricos que aporta cada unidad.

b) Utilizar estos elementos para justificar, lógica y formalmente, los saberes puestos en juego en la resolución de problemas.

El conocimiento aparece como incuestionable, la tarea del alumno es comprenderlo, justificarlo y aplicarlo a la resolución de ejercicios complejos que permitan hacer suyas las heurísticas complejas que proveen.

iv) Las organizaciones matemáticas que se abordan corresponden casi exclusivamente, a modelizaciones o generalizaciones de propiedades del Análisis Matemático. Las propiedades toplógicas que tienen su origen en el campo geométrico están ausentes de toda consideración entre los sistemas modelizados.

v) El momento exploratorio no forma parte de la propuesta de reconstrucción institucional del saber. En ninguna de las unidades se plantean problemas, situaciones, etc. que permitan al alumno hipotetizar, conjeturar y formular, como paso previo a la institucionalización de los saberes.

vi) La topología en *I* es presentada como un nuevo lenguaje para objetos que en muchos casos son conocidos y cuya razón de ser está vinculada esencialmente a necesidades de la ciencia matemática que no se hacen visibles a los alumnos. Si lo hicieran dejarían al descubierto quizá aún más la desvinculación de estos saberes con los de la escuela media.

vii) Existe un verdadero trabajo de institucionalización que está enteramente a cargo del docente y un trabajo formal por parte del alumno, que garantiza los conocimientos mínimos para la entrada a cualquier estudio científico posterior.

Claramente también se presenta una OM incompleta respecto de la Topología en la enseñanza con características similares a las de los libros de texto y respondiendo al modelo de topología de las propuestas curriculares.

4.3.3. Restricciones transpositivas

A partir de los apuntes de clase de los alumnos se analizaron las restricciones transpositivas que sufre la Topología. Se observaron cinco grandes tipos de restricciones transpositivas, fuertemente relacionadas entre sí:

1.- Restricciones que provienen de la representación institucional del saber matemático que supone interpretar la Topología como un Análisis Generalizado. El primer tipo de restricciones, responde al modelo epistemológico dominante en la institución que entiende a la *topología como un Análisis Matemático Generalizado.* Esto produce los siguientes efectos no deseados: (i) *Se pierden las razones de ser de algunas obras matemáticas*. (ii)Se produce una *atomización* de las organizaciones matemáticas abordadas institucionalmente en el proceso didáctico en tanto no aparecen ciertas organizaciones matemáticas que permitirían vincularla. (iii) El producto resultante del proceso de reconstrucción es una organización matemática *estructural y formalizada*, que constituye un "idioma nuevo", sofisticado, complejo, del cual no se llega a hacer visible su imprescindibilidad. (iv) Se desdibuja la vinculación de la formación del profesor con su práctica futura.

2.- Restricciones impuestas por los conocimientos previos. Respecto de los contenidos previos la Topología aparece al alumno, en algún sentido, como desequilibrada; hay un sentido implícito de equilibrio entre *costo* y *beneficio* en el estudio de una asignatura que, desde la perspectiva de los conocimientos previos del alumno, se desbalancea en esta. Por un lado los saberes topológicos, en tanto son *modelizaciones de modelizaciones*, se requiere un conocimiento y un cuestionamiento de los sistemas a modelizar que hagan comprensible la modelización y su necesidad. La topología en *I* requiere de un trabajo formal y abstracto sobre objetos del Análisis que, desde las asignaturas previas, hace muy costoso su estudio, por otro, los problemas que se abordan así como las técnicas y tecnologías utilizadas aparecen como muy alejadas de la matemática de la escuela media, lo que hace difuso el beneficio de su estudio. Sabemos que la epistemología cultural corriente de la escuela media [8] condiciona lo que los docentes de secundaria deben *hacer* y deben *saber,* pero no sólo a ellos también condiciona a los alumnos del profesorado. Bajo esta mirada epistemológica no se hace visible la importancia o necesidad del estudio de la Topología.

3.- Restricciones impuestas por el tiempo didáctico. El tiempo institucional está, en general, más en función del *tiempo del docente*, es decir del tiempo que le lleva al docente desarrollar la asignatura, que del *tiempo del alumno*, el que le lleva al alumno estudiarla.

4.- Restricciones que provienen de la falta de construcción del sentido de las OM.

Respecto a las *razones de ser* Chevallard, Bosch y Gascón (1997) sostienen que para que una *organización matemática* pueda ser estudiada *con* "*sentido*"en una institución I se requiere: Que *tenga legitimidad cultural*, es decir que la Sociedad entienda que dichas cuestiones deban ser estudiadas. Que *tenga legitimidad matemática*, es decir que abarque organizaciones que formen parte del núcleo de la matemática. Que *provenga de alguna parte* y que *conduzca a alguna parte,* esto es, que esté relacionada con otras cuestiones que se estudian en la institución y que *surja para dar respuesta a problemas* que de otra manera no la tendrían.

El recorte institucional de lo topológico que se realiza en *I* cuenta con legitimidad matemática, en tanto, visto desde la ciencia matemática, se aborda una OM con un importante grado de *extensión* y de *intención*. No ocurre lo mismo con la legitimidad cultural en tanto no responde a las razones que hacen que una OM cobre sentido para un alumno del profesorado. En esta organización didáctica, por un lado han desaparecido los problemas que podrían acercarla a las requisitorias de la epistemología cultural del alumno y por otro, dejar de lado la dimensión geométrica inhibe el tratamiento de problemas, como es la posibilidad de generalizar la conocida fórmula de Euler o abordar problemas de topología combinatoria, que contribuirían a acercar las relaciones costo beneficio.

5.- Restricciones que provienen de las acciones de la noosfera. Hay restricciones que tienen que ver con el juicio cultural institucional emitido sobre las organizaciones matemáticas a ser enseñadas. Esta asignatura, por ser una de las últimas de la carrera de Profesorado en Matemática, recibe el peso institucional de medir las *condiciones matemáticas* en que los alumnos egresan, en particular las condiciones en que, los alumnos que así lo decidan,

[8]Chevallard (2001) hace visible un fenómeno que muestra cómo la *sociedad* puede condicionar los objetos matemáticos que emergen en los sistemas de enseñanza. Analiza una de las exigencias sociales respecto a la enseñanza. La sociedad requiere que lo que se enseñe mantenga relación con *modelos "concretos"*, naturalizados por la cultura corriente y que den cuenta de la realidad, en el sentido que sean modelos socialmente reconocidos. Es a consecuencia de este *principio de la cultura corriente* que se observa en las instituciones un rechazo a todos aquellos objetos de enseñanza que no son reducibles a *modelos concretos*.

ingresen a la carrera de Licenciatura en Matemática. En este sentido el tratamiento aceptado institucionalmente para la asignatura es aquél que aproxime más al alumno al *saber* y al *hacer* del matemático, bajo una concepción determinada de cuál es el *saber* y el *hacer del matemático* en concordancia que con los modelos epistemológicos institucionales.

4.4. Razones que llevan a la identificación de la Topología con un Análisis Generalizado

Nos preguntamos por las razones por las cuales se da la identificación de la topología con un *Análisis Generalizado.* Vemos que provienen de la influencia institucional de *I` sobre I.*

La *epistemología cultural corriente en I* acepta como bueno para la enseñanza todo lo que es bueno para la ciencia. Esto responde a la preeminencia de *I'* sobre *I* en la noosfera que se pone de manifiesto en la configuración de las OM que es posible abordar en *I,* en particular y más profundamente por las razones antes mencionadas, en la Topología. La *desgeometrización* de la topología en la enseñanza es una consecuencia visible de ello.

En la tesis de Pilar Bolea (2003) se dice respecto a la *desalgebrización del currículo de la escuela* que ello se debe sobre todo a la *peyoración cultural del álgebra.*[9]Ocurre algo semejante con la *desgeometrización de la Topología* pero por razones algo diferentes, se debe a la *peyoración de lo Geometrico* respecto de lo *Análítico* en *I`.* La preeminencia de los modelos epistemológicos de los sistemas de producción matemática sobre los sistemas didácticos, en los niveles de co-determinación de lo didáctico hacen que en *I'* (en consecuencia en *I*) se valoren más algunos contextos que otros, no sólo por las organizaciones matemáticas que se estudian sino por los elementos tecnológico-teóricos con que se las aborda. Es sabido que los formalismos desarrollados a través del lenguaje escrito, conforman un conocimiento necesario básico para cualquier desarrollo de la ciencia, en ese camino se dejan de lado las ramas de la topología que menos aportan en ese sentido. El valor que asigna la ciencia matemática actual al *Análisis* por un lado y al *formalismo* por otro condiciona el tipo de organizaciones matemáticas que es posible abordar en *I*.

En este sentido la importancia que cobra una y otra topología en *I'* es diferente hoy día. Y esto es trasladado sin más a *I,* es decir a la formación de profesores. Sumado a ello, en los textos, la topología conjuntista se presenta con un grado de formalización muy superior al de la combinatoria, lo que hace aparecer a la primera más próxima a la ciencia que la segunda.

Aquí podemos observar una doble determinación de lo didáctico respecto de lo topológico. En los niveles de co-determinación de lo didáctico, lo disciplinar está por encima de lo didáctico y en lo disciplinar actúan dos instituciones *I* e *I'*. Esta preeminencia de *I`* sobre *I* se manifiesta en las organizaciones didácticas. En Gascón (2002) se establecen relaciones entre las maneras de concebir la ciencia matemática institucionalmente y los praxeologías admitidas para su enseñanza. Nos preguntamos entonces acerca de los modelos epistemológicos dominantes en *I.*

---

[9]En Bolea (2003) se dice que la peyoración cultural del álgebra es propia de la cultura occidental, que sustenta la postura que el pensamiento reside en la cabeza, se expresa por la voz y se conserva por la escritura. En este sentido, se afirma, la escritura es una *degradación del pensamiento*, un producto secundario de éste.

4.5. Incidencia de los modelos epistemológicos dominantes en *I* en los modelos docentes.

¿Conocer el modelo epistemológico institucional qué interés tiene? Gascón (2002) sostiene que todo modelo epistemológico de la matemática conduce naturalmente a formas particulares de pensar el proceso de enseñanza que se traducen en *Organizaciones Didácticas* particulares. Estas OD manifiestan ciertas características distintivas que se manifiestan como modelos docentes. Nos propusimos hacer explícitos los *modelos epistemológicos de la matemática* implícitos pero dominantes en I, que se ponen de manifiesto en la asignatura *Topología*, para explicar las praxeologías didácticas y matemáticas.

Los modelos epistemológicos planteados por Gascón (2001) surgen de una *reconstrucción racional* de la *evolución del problema epistemológico* a la manera de Imre Lakatos (1974) y a partir de allí se describen los rasgos fundamentales de *modelos docentes*[10] que se sustentan en los modelos epistemológicos.

Del análisis realizado en los diferentes materiales empíricos pudimos observar rasgos de dos modelos epistemológicos, la mayoría corresponden al modelo epistemológico *euclidiano* y se observan algunos rasgos del *cuasi-empírico*. La marcada valoración del análisis lógico como punto de partida del trabajo matemático, la preeminencia absoluta de lo justificativo por sobre lo explicativo y el tratamiento formal de los saberes, son rasgos característicos del modelo euclideano. Otras características como es el rol asignado a la resolución de problemas complejos muestra algunos rasgos del *cusiempirismo*. Por otra parte, pudo observarse que los modelos epistemológicos subyacentes no muestran rasgos del *constructivismo.*

La penetración de un modelo epistemológico en el sistema de enseñanza da origen a distintas maneras de gestionar la enseñanza de la matemática, en este sentido, pudimos observar que los modelos docentes en *I,* mirados desde la Topología, oscilan entre el *teoricismo y el procedimentalismo.* Claramente estos modelos, están lejos de cualquiera de los modelos constructivistas, que son requeridos al profesor de enseñanza media a partir de las últimas reformas educativas.

Reconocer los *modelos docentes* que están implícitos en las prácticas didácticas en *I,* permite dar cuenta de las organizaciones didácticas que son *vividas* por el futuro profesor de matemática en su formación . Las praxeologías experimentadas cobran un sentido diferente al de cualquier otra que pueda provenir de un nivel teórico.

CONCLUSIONES

Caracterizar lo que en la institución *I* se entiende por *Topología*, es útil en varios sentidos. En primer lugar porque permite disponer de un conocimiento fundado de lo que se realiza en la asignatura, de lo que debe modificarse, cómo y por qué. Además permite encontrar indicadores de los modelos epistemológicos dominantes en *I* que, como vimos, condicionan las praxeologías matemáticas y didácticas que son factibles de ser desarrolladas en *I* . Los recortes transpositivos de las organizaciones matemáticas abordadas en *I* son el producto de

[10] Define *modelo docente* como el conjunto de prácticas docentes compartidas que permiten organizar y gestionar el proceso de enseñanza de la matemática en una institución determinada.

modelos epistemológicos que se establecen a partir del condicionamiento o preeminencia de una institución sobre otra. En este caso la de los científicos matemáticos, sobre la de formación de profesores.

Esto permite mostrar que para llevar adelante una reestructuración de las prácticas de enseñanza en *I,* de manera que se correspondan con modelos docentes superadores, es necesario superar, dentro de los niveles de determinación de lo didáctico, los temas o cuestiones para buscar las razones que determinan las praxeologías en una institución. Esto muestra que una modificación de las praxeologías requiere trabajar institucionalmente sobre las maneras de entender la matemática y su enseñanza. Pudimos observar también que ese trabajo debe buscar hacer coherentes las prácticas matemáticas entre las instituciones formadoras de profesores de matemática con aquellas en que los profesores realizan sus desarrollo profesional para contribuir a lograr organizaciones didácticas y matemáticas que cobren sentido y legitimidad para los alumnos del profesorado en matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Bosch M., Gascón J. (1994). *La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemática.* Rev. De Enseñanza de las Ciencias. 1994. 12(3). 314-332.

Bosch M., Fonseca C., Gascón J. (2004). *Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares.* Recherches en Didactique des Mathematiques. En prensa.

Chevallard Y. (1985) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné,* La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y. (1989). *Le passage de l'aritmetique a l'algebrique dans lènsignement desw mathematiques au collège. Perspectivas curiculaires : la notion de modelisation*. Petit x, 19 pp 43-72

Chevallard Y., Bosch M., Gascón J. (1997) *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* ICE-Horsori. Barcelona.

Chevalard Y. (2001).*Aspectos problemáticos de la formación docente*. XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Invetigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca.

Gascón J. (1994). *El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.* Educación Matemática. 6/3. pp 37-51

Gascón J. (2001a) *Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. RELIME. Vol 4(2).

Gascón J. (2001b) *Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docentes del profesor de matemáticas*. Ponencia presentada en as XVI Jornadas del SI-IDIM celebradas en Huesca.