La modelización matemática como instrumento de articulación de las matemáticas del primer ciclo universitario de Ciencias.

Estudio de la dinámica de poblaciones.

Berta Barquero[1], Marianna Bosch[2], Josep Gascón[3]

RÉSUMÉ

Le travail que nous présentons ici se situe dans la problématique de l'enseignement de la modélisation mathématique. Les contraintes didactiques que rencontre cet enseignement dans le collège et le lycée ont déjà fait l'objet d'étude. Nous la considérons ici dans un environnement institutionnel a priori plus favorable, les facultés de sciences expérimentales, où l'enseignement cohabite avec des pratiques de recherche riches en modélisation mathématique. Malgré cela, et du moins en Espagne, la problématique de la modélisation est presque absente de tout l'enseignement universitaire, où les organisations mathématiques s'introduisent toujours dépourvues de l'environnement extra-mathématique qui leur a donné naissance. Nous proposons ici un *parcours d'étude et de recherche* fondé sur l'étude de la *dynamique de populations* qui devrait pouvoir fonctionner comme axe articulateur des mathématiques enseignées dans un premier cours de sciences expérimentales.

ABSTRACT

The objective of this work is to address the problem of teaching mathematical modelling. The didactical restrictions that we encounter at secondary school level have already been studied. Here we consider an institutional environment that is supposed to be more welcoming, the teaching of mathematics for experimental sciences at university level, where teaching processes coexist with research practices full of mathematical modellings. However, and at least in Spain, modelling is rarely included in the university curriculum. Indeed, the mathematical praxeologies are presented as deprived of the extra-mathematical context where they were created. Here ee propose the design of a *study and research course* based on the *study of population dynamics.* This framework should be able to operate as an articulating axe for the mathematics taught in a first-year course in experimental sciences.

1. EL PROBLEMA DE LA ENSEÑANZA DE LA MODELIZACIÓN

Una vez puestas en evidencia las dificultades o restricciones didácticas con que se encuentra la enseñanza de la modelización matemática en la educación secundaria obligatoria y post-obligatoria (García 2005, Bolea, Bosch, Gascón 2004) se podría suponer que las facultades de ciencias experimentales, de ingeniería o de ciencias económicas y sociales constituyen el entorno institucional más favorable para la enseñanza de la modelización matemática. En efecto, si los estudios mencionados incorporan en su currículum asignaturas de matemáticas, es porque éstas constituyen una herramienta de modelización imprescindible para la comprensión, la utilización y el desarrollo de las ciencias contemporáneas.

Curiosamente, la realidad es muy distinta. La problemática de la modelización está prácticamente ausente en la enseñanza universitaria española, donde. En ésta las matemáticas se organizan en base a criterios que reproducen la lógica de la construcción axiomática de los conceptos y no a partir de las cuestiones que motivan la utilización de los modelos y las técnicas que estos conceptos permiten elaborar. A riesgo de simplificar, podemos incluso afirmar que actualmente existe esencialmente un único curso de matemáticas para todos los

[1] Universitat Autònoma de Barcelona, barquero@mat.uab.es
[2] Fundació EMI – Universitat Ramon Llull, mbosch@fundemi.com
[3] Universitat Autònoma de Barcelona, gascon@mat.uab.es

primeros cursos universitarios, independientemente de la carrera cursada. La situación no dista mucho de la que describe Yves Chevallard en los términos siguientes:

> Dans une telle formation, le souci des applications pratiques et même le simple contact entre mathématiques et non mathématique sont à peu près totalement absents, quand ils ne sont pas regardés avec hauteur […]. L'inintérêt, muet ou proclamé, de la plupart des formations universitaires de mathématiques pour l'extramathématique fait que les notions nécessaires pour penser mathématiquement le non-mathématique n'y reçoivent pas même un début de mathématisation […]. (Chevallard 1998)

En la formación universitaria se enseñan conocimientos previamente matematizados, sin atribuir mucho protagonismo a los procesos de matematización de sistemas extramatemáticos que han dado lugar a estos conocimientos. La transposición didáctica no opera en el proceso de matematización, esto es, no transpone la actividad de modelización. Lo único que transpone son organizaciones matemáticas (OM) previamente cristalizadas. En consecuencia estas OM se introducen en la enseñanza universitaria desprovistas de su relación con los sistemas extramatemáticos que les han dado origen.

La "ideología" imperante en las instituciones universitarias es la de la "aplicación": lo primero es aprender a manejar los modelos matemáticos supuestamente únicos y luego ya se verá como "aplicarlos" a cada ámbito particular de trabajo. No se tiene en cuenta que, en muchas ocasiones, el modelo matemático que se pretende aplicar proviene de la matematización o modelización previa del sistema al cual queremos aplicar el modelo. En definitiva, se considera que la *aplicación* y la *matematización* (o *modelización*) son procesos independientes cuando, en realidad, son procesos inversos que se condicionan y dan sentido mutuamente.

En este trabajo nos planteamos el *problema didáctico* siguiente: dado un programa de estudios propuesto en una institución docente y descrito en términos clásicos, esto es, mediante "temas" (que contienen definiciones, teoremas, demostraciones y tipos de problemas), ¿cómo diseñar un proceso de estudio capaz de reconstruir en dicha institución una OM suficientemente amplia y relativamente completa (digamos "regional") que articule las OM puntuales y locales que aparecen relativamente aisladas e incompletas en el programa en cuestión?

Postulamos que para abordar este problema didáctico es imprescindible que la *modelización matemática* sea utilizada de manera explícita y central en el proceso de estudio. Por tanto, y en aras de resolver el problema didáctico propuesto, basaremos nuestra estrategia en el análisis previo de las restricciones transpositivas que impiden (o dificultan enormemente) la presencia de los procesos de modelización matemática en las instituciones docentes.

Consideraremos aquí el caso particular del primer curso de matemáticas de las Facultades de Ciencias Experimentales (biología, geología, química, física) cuyo programa se presenta generalmente estructurado en cuatro grandes ámbitos: Números reales, Álgebra Lineal, Cálculo diferencial y integral (en una variable) y finalmente, Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.

2. RESTRICCIONES TRANSPOSITIVAS SOBRE LA MODELIZACIÓN

¿De qué forma actúan los fenómenos transpositivos para convertir prácticamente en "invisible" la modelización matemática en las instituciones didácticas? ¿Cómo se manifiesta esta influencia sobre las OM que se estudian en el primer curso de matemáticas de las Facultades de Ciencias y en la forma de organizar su estudio?

De la teoría de la transposición didáctica se desprende la existencia de cuatro tipos de restricciones genéricas a las que está sometido el *saber enseñado* en el seno de cualquier sistema de enseñanza (Bolea, Bosch, Gascón 2001, pp. 291-292). Aplicaremos estas restricciones al caso particular de la modelización matemática. Con ello pretendemos empezar a explicar su ausencia en la matemática escolar al tiempo que indagamos las condiciones que harían posible su presencia.

> **(1)** Restricciones que provienen de la *representación institucional* tanto del saber matemático que se enseña, como de la manera como el alumno aprende y de lo que comporta enseñar matemáticas.

En el caso de la modelización matemática, y dado que ésta es considerada –muy especialmente en la Universidad– como un mero "cambio de lenguaje, relativamente trivial", se desvirtúa su carácter instrumental como herramienta de construcción de nuevas matemáticas, desapareciendo prácticamente el juego entre el "sistema" y el "modelo". Para soslayar en alguna medida esta restricción sería preciso utilizar la modelización matemática de manera que tenga un gran protagonismo a lo largo del proceso de estudio, explicitando y resaltando en cada paso su papel esencial como herramienta de construcción de conocimientos matemáticos.

> **(2)** Restricciones provocadas por la *necesidad de evaluar* la eficacia de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones didácticas. Esta necesidad tiende a provocar una *diferenciación* y *autonomización* interna del corpus enseñado, así como una mayor *algoritmización* del mismo con la consiguiente *pérdida de sentido funcional* del saber enseñado.

En el caso que nos ocupa, y dado que las técnicas de modelización están entre las técnicas matemáticas menos visibles, menos "algoritmizables", menos "atomizables" y, en definitiva, *más difícilmente evaluables*, nos encontramos ante una restricción ecológica muy fuerte que dificulta de manera muy decisiva la vida escolar de los procesos de modelización matemática. Únicamente si se transforma el objetivo del proceso de evaluación de tal manera que la evaluación abarque no sólo a los componentes (normalmente bastante aislados) de la OM construida, sino todo el proceso de construcción, será posible que la modelización matemática pueda vivir en la matemática escolar.

> **(3)** Restricciones impuestas por el *tiempo didáctico* en diversos aspectos como, por ejemplo: la *obsolescencia interna* del proceso didáctico, la exigencia de un *aprendizaje rápido* o en un tiempo muy limitado, que puede llegar a la exigencia cultural del *aprendizaje instantáneo* y, por último, las restricciones ligadas a la disponibilidad de la *memoria didáctica del sistema*.

La *obsolescencia* interna del proceso didáctico provoca la expulsión de aquellos componentes o elementos de las OM escolares que aparecen como más obsoletos o desfasados, al tiempo que otros elementos de dichas OM permanecen en la institución. Este fenómeno de *obsolescencia selectiva* elimina de la memoria institucional los objetos (especialmente los instrumentos de la actividad matemática) que no cristalizan en componentes materiales de las OM construidas.

Además, la transposición didáctica de los procesos de modelización matemática requeriría tomar en consideración *objetivos de estudio a largo plazo* que permitiesen estudiar el sistema de partida, cuestionarlo, llevar a cabo todas las etapas del proceso de modelización y "dar tiempo al tiempo" para poder seguir cuestionando el primer modelo, analizar sus limitaciones, construir nuevos modelos, etc. Pero esta condición que es imprescindible para llevar a cabo el proceso de modelización matemática de manera funcional, choca con la exigencia de un *aprendizaje rápido* e incluso *instantáneo*[4] provocando nuevas restricciones a la posibilidad misma de llevar a cabo, en el ámbito escolar, procesos de completos de modelización matemática.

---

[4] "[...] partimos de la base universalmente aceptada de que el profesor enseña y el alumno aprende. Es la ficción del aprendizaje "instantáneo", en tiempo real. La gente se comporta como si todo se pudiere entender, y por lo tanto aprender, al mismo tiempo que se enseña. Se trata de una exigencia absurda e inhumana" (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, pp. 297-298).

Vuelve a aparecer la necesidad de explicitar, hacer cristalizar e institucionalizar (además de evaluar) el propio proceso de modelización (y no tan solo la OM resultante). Esto únicamente será posible si conseguimos que el proceso de estudio tenga una cierta continuidad en el tiempo, si conseguimos romper la atomización de las cuestiones matemáticas escolares.

> **(4)** Restricciones que provienen de la necesidad de que todo *saber enseñado aparezca como definitivo* e *incuestionable*. Esta necesidad "didáctica" choca con la necesidad de la dinámica de todo proceso de estudio de retomar las OM estudiadas anteriormente para mostrar sus limitaciones y contradicciones, y para *reestructurarlas e integrarlas* en otras OM cada vez más amplias y complejas.

Este cuarto tipo de restricciones inciden directamente sobre los procesos de modelización en cuanto que éstos constituyen procesos de reorganización de las OM. En efecto, la necesidad de que todo saber enseñado *aparezca como definitivo* e *incuestionable* impide que éste muestre sus limitaciones y contradicciones y, por tanto, desaparece la necesidad de reestructurar, modificar, corregir e integrar las OM estudiadas en otras más amplias y complejas. Este tipo de restricciones transpositivas dificultan el *cuestionamiento tecnológico*[5] de las OM previamente estudiadas que es el motor de todo proceso de modelización.

El conjunto de restricciones que acabamos de explicitar son difíciles de soslayar en la medida en que muchas se generan no sólo más allá del aula sino incluso más allá de la institución escolar. Se explica así la ausencia explícita de la modelización en la matemática escolar, al tiempo que se sugieren algunas condiciones que podrían empezar a hacer posible su presencia.

En este trabajo, presentamos el diseño de un proceso de estudio todavía no experimentado que sitúa la modelización en el corazón del trabajo matemático que se propone a los alumnos y permite "recorrer", en el sentido de los *Recorridos de Estudio e Investigación* propuestos recientemente por Chevallard (2004 y 2005), un amplio abanico de las matemáticas enseñadas en un primer curso universitario. Partiremos de una *cuestión generatriz* en torno al estudio de la *dinámica de poblaciones* que servirá de *hilo conductor* del proceso de estudio. Propondremos responderla a partir de distintos modelos matemáticos que serán elaborados *explícitamente* para este fin. Al estudiar las relaciones entre el sistema considerado y el modelo inicial aparecerán nuevas cuestiones que requerirán la construcción de un nuevo modelo que, a su vez, generará más y más cuestiones que sólo podrán responderse mediante la construcción de modelos matemáticos cada vez más comprensivos. Se originará, en definitiva, un proceso de ampliaciones sucesivas de los modelos que, postulamos, permitirá articular las OM que se enseñan actualmente en la institución citada. Este proceso de modelizaciones sucesivas pondrá asimismo de manifiesto que la OM finalmente reconstruida depende tanto de la cuestión generatriz como de la naturaleza de los sucesivos modelos construidos[6], lo que trae consigo la necesidad de incluir el proceso de construcción entre los elementos que deben ser institucionalizados y evaluados. En particular, y dado que las *limitaciones* e *insuficiencias de los modelos* sucesivos para responder a las cuestiones que van emergiendo forman parte esencial del proceso, también deberán ser institucionalizadas y evaluadas.

---

[5] Llamamos cuestionamiento *tecnológico* al conjunto de cuestiones problemáticas que pueden enunciarse respecto al alcance, la interpretación, la eficacia y hasta la justificación de las *técnicas* matemáticas. Para una primera aproximación al tema de las relaciones escolares entre los momentos *del trabajo de la técnica* y *tecnológico-teórico* el lector puede consultar Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 283-290).

[6] Se rompe así el mito de la "unicidad" de la OM que contiene un determinado conjunto de nociones, teoremas y tipos de problemas.

3. UN POSIBLE DESARROLLO DE LA CUESTIÓN GENERATRIZ[7]

3.1. Modelos de poblaciones

Partimos de la consideración de un sistema X (población) en el que una magnitud x_t (tamaño de la población) evoluciona con el paso del tiempo t. Consideramos inicialmente que el tiempo t está medido en unidades discretas (generaciones) y que x_t depende, entre otras cosas, de los estados anteriores $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots, x_{t-d}$ $(0 < d \leq t)$. Suponemos además que la población es *autónoma* en el sentido de que no se considera ningún cambio en sus condiciones externas.

El estudio de la evolución o *dinámica* de la población X plantea la siguiente cuestión inicial:

> ***Q₀***: Si conocemos el tamaño de la población en algunas generaciones, ¿podemos predecir qué pasará después de n generaciones? ¿Es siempre posible predecir el comportamiento de la población a largo plazo? ¿El número de individuos crece de forma ilimitada o, contrariamente, se llega a estabilizar en algún valor? ¿Podemos calcular esta situación de equilibrio en caso de existir?

El estudio de esta cuestión conduce a considerar dos grandes tipos de modelos según si x_t sólo depende de x_{t-1} (población con generaciones separadas) o si x_t depende de las $d > 1$ generaciones anteriores $x_{t-1}, x_{t-2}, \ldots x_{t-d}$ (población con generaciones mezcladas).

Desarrollaremos aquí el primer tipo de modelos que, como veremos más adelante, conducen al estudio de *sucesiones recurrentes de orden* 1: $x_{t+1} = f(x_t)$, siendo f una función de variable real. El segundo tipo conduciría a la consideración de sucesiones recurrentes de orden $d > 1$ reducibles a *sucesiones recurrentes vectoriales* del tipo $X_{n+1} = f(X_n)$ donde $X_0 = (x_0, x_1, \ldots x_{d-1})$ es el vector de las d primeras generaciones y $X_i = (x_{id}, x_{id+1}, \ldots, x_{(i+1)d-1})$ el i-ésimo vector de d generaciones sucesivas con $0 \leq i \leq n$. Si en lugar de estudiar la dinámica de una generación a otra, consideramos la evolución continua de la población, encontraríamos una estructura análoga y paralela con modelos matemáticos en forma de *ecuaciones diferenciales* de orden 1 o superior, tal como muestra el esquema del *Anexo*.

3.2. Poblaciones con generaciones separadas: del modelo maltusiano al logístico.

Denotamos por x_n la cantidad de individuos de la generación n de la población X. La evolución general de una especie o población queda caracterizada por el estudio de la sucesión $(x_n)_{x\in \mathrm{N}}$. La hipótesis de generaciones separadas conduce a considerar dos posibles medidas del crecimiento de la población:

Tasa de variación absoluta de X entre dos generaciones consecutivas: $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$.

Tasa de variación relativa de X entre dos generaciones consecutivas: $r_n = \dfrac{\Delta x_n}{x_n} = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n}$.

A continuación presentaremos, de forma resumida, las *hipótesis sobre X* (H_i), las *cuestiones problemáticas centrales a tratar* (Q_i), la descripción de la *construcción de los modelos* (M_i) interpretados como herramientas imprescindibles para responder a las cuestiones (Q_i) y las sucesivas *respuestas* provisionales (R_i) a dichas cuestiones.

Empezaremos tratando el modelo matemático más sencillo con el que trabajaremos.

> ***H₁*** : La tasa de variación relativa de la población puede suponerse constante: $r_n = r$
>
> ***Q₁*** : ¿Cuál es la dinámica de una población con tasa de crecimiento constante?

[7] Existe una versión más completa de este apartado en la cual se explicitan muchos de los detalles que, por falta de espacio, no hemos podido presentar aquí. Recuperable en http://www.wiris.com/mambo/.

Construcción de M_1*:** La situación descrita se puede modelizar con el siguiente modelo (M_1***): $\frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = r$, llamado "*Modelo Maltusiano*"[8].

Este modelo es equivalente a la ecuación recurrente $x_{n+1} = rx_n + x_n = (1 + r)x_n$; equivalente a $x_{n+1} = \alpha x_n$ con $\alpha = 1 + r$, donde el parámetro α se interpreta como el *coeficiente de reproducción* de *X.* Aplicando esta relación recurrente a todos los elementos de la sucesión, se obtiene: $x_{n+1} = \alpha x_n \Leftrightarrow x_n = \alpha x_0^{\,n}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

De modo que, si conocemos el tamaño de la población inicial $x_0 = c > 0$, entonces podemos calcular x_n para cualquier generación *n*: $\boxed{\begin{cases} x_n = (1+r)^n x_0 = \alpha^n x_0 \\ x_0 = c \end{cases}}$

Podemos dar la siguiente respuesta a ***Q_1*** :

R_1

- Si $r > 0$ (o si $\alpha < 1$) entonces $(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, *extinción* de la población.
- Si $r = 0$ (o si $\alpha = 1$) entonces $(x_n) \equiv c$ para toda *n*.
- Si $r < 0$ (o si $\alpha > 1$) entonces la población crece indefinidamente: $(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Limitación de M_1: El caso $r > 0$ supone la existencia de recursos infinitos.

Esta limitación del paradigma Maltusiano conduce a introducir una nueva hipótesis:

> ***H_2*** : El tamaño de la población no puede sobrepasar cierto valor máximo *K*.
>
> La tasa de variación decrece a medida que la población se aproxima al valor máximo establecido. Por ejemplo, suponemos que la tasa decrece linealmente.
>
> ***Q_2*** : ¿Cuál es la evolución o la dinámica de una población cuando la tasa de crecimiento decrece linealmente?

Construcción de M_2* :** Como dice ***H_2, suponemos que la tasa de crecimiento relativo decrece linealmente, por tanto es el caso en que: $r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a - bx_n$, con $b > 0$. Como el tamaño de la población no puede sobrepasar cierto valor máximo que llamamos *K*, pedimos que cuando $x_n \approx K$ o, equivalentemente, $\frac{x_n}{K} \approx 1$ entonces $r_n \approx 0$.

Uno de los modelos más sencillos que cumple ***H_2*** es el que resume la siguiente fórmula: $r_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ con $a, K > 0$ que resulta al considerar $b = \frac{a}{K}$. Trabajando con esta igualdad llegamos a la ecuación recurrente: $x_{n+1} = x_n + a\,x_n\left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$. Mediante un cambio de variable y definiendo $\alpha = a + 1$, obtenemos la forma equivalente $y_{n+1} = \alpha\, y_n\left(1 - \frac{y_n}{K}\right)$,

[8] Thomas Robert Malthus (1766-1834) economista y demógrafo inglés, conocido primordialmente por su teoría de la población, que expuso por primera vez anónimamente en, *An essay on the principle of population as it affects the future improvement of society* (1798). En esta obra se puso de manifiesto la contradicción existente entre el crecimiento exponencial de la población humana y el crecimiento lineal de los recursos.

conocida como la *ecuación logística* (discreta) o “*modelo de Verhulst*”[9] donde α representa el *coeficiente de reproducción* de X cuando hay recursos infinitos y K el *número máximo de individuos* que pueden vivir en el hábitat considerado.

A diferencia del modelo Maltusiano, *en general la ecuación logística no permite una forma general del tipo* $x_n = f(n)$. Su estudio requiere pues otras herramientas.

Exploración: La *simulación numérica*[10] para algunos valores particulares de los parámetros constituye aquí un primer *medio experimental* y permite constatar que la dinámica de la sucesión $x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$, depende fuertemente del parámetro α y permite formular la siguiente respuesta provisional a $\boldsymbol{Q_2}$:

R_2 provisional

- Si $1 < \alpha < 3$ (equivalentemente $0 < a < 2$), la población acaba tendiendo a cierta *situación de equilibrio,* $(x_n) \to L$.
- Si $\alpha > 3$ (equivalentemente $a > 2$) aparecen situaciones difíciles de analizar. Algunas veces la sucesión oscila entre varios valores (aparición de *órbitas periódicas*), otras veces aparece un comportamiento ***caótico*** cuya dinámica pasa a ser completamente dependiente de los valores iniciales (*sensibilidad respecto las condiciones iniciales*).

Determinación de L: De la ecuación recurrente $x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ se deduce que si (x_n) converge a un límite L, entonces $L = \alpha L \left(1 - \frac{L}{K}\right)$. Si definimos $f(x) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$, encontrar los candidatos L es lo mismo que encontrar los puntos fijos de $f(x)$.

3.3. Un modelo funcional como generalización del maltusiano y del logístico.

Podemos sintetizar el trabajo realizado hasta aquí mediante la definición de ecuaciones o relaciones recurrentes definidas como: $x_{n+1} = f(x_n)$ donde f representa la relación funcional (lineal o cuadrática) que hay entre las dos generaciones consecutivas de la población considerada.

A pesar de la potencia de los modelos algebraico-numéricos, que permiten estudiar la dinámica de poblaciones que satisfacen $\boldsymbol{H_1}$ y $\boldsymbol{H_2}$, aparecen dinámicas muy complejas que muchas veces no podremos o no sabremos tratar ni justificar. En definitiva, surge la necesidad de la búsqueda de un modelo nuevo que incluya el anterior y permita (re)formular y responder tanto a las cuestiones que el modelo $\boldsymbol{M_2}$ ha permitido contestar como las que han quedado sin respuesta. Principalmente, necesitamos un modelo que permita explicar las limitaciones de $\boldsymbol{M_2}$, así como plantear cuestiones nuevas y más profundas.

---

[9] Pierre François Verhulst (1804-1849), en 1838 dio expresión matemática al paradigma maltusiano en forma de ecuación logística. Verhulst transformó el crecimiento exponencial o geométrico, en uno de limitado, imponiendo la finitud de recursos disponibles.

[10] En adelante no describiremos el caso $\alpha < 1$ (equivalentemente $a < 0$) que corresponde al caso de *extinción de la población.*

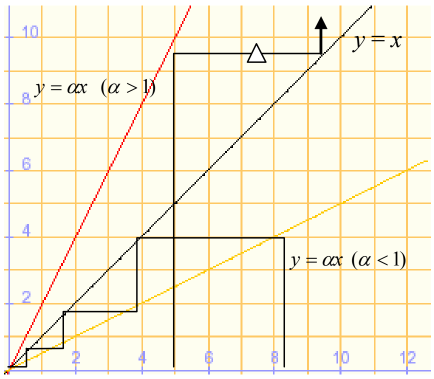
En este caso, una vía productiva consiste en estudiar directamente el modelo general $x_{n+1} = f(x_n)$ del que $\boldsymbol{M_1}$ y $\boldsymbol{M_2}$ son casos particulares (función lineal y cuadrática respectivamente). Consideramos así un ***modelo funcional general*** **(*M*₃)** dado por *todas las ecuaciones recurrentes* del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$. La cuestión se formula ahora como:

Q₃: ¿Cuál es la dinámica de la sucesión (x_n) generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f función cualquiera?

Exploración: la consideración del modelo funcional permite realizar una *simulación gráfica* con las curvas $y = f(x)$ e $y = x$ (tela de araña), lo que constituye un segundo *medio experimental.* Sólo consideraremos aquí la utilización de este modelo a los casos anteriores (maltusiano y logístico).

Aplicación al modelo maltusiano (M_1)

La ecuación $x_{n+1} = \alpha x_n$ equivale a considerar la ecuación $x = \alpha x$, obteniendo un solo punto fijo $x = 0$. El parámetro α coincide con la pendiente de la recta. Tenemos que diferenciar 3 casos ($\alpha < 1$, $\alpha = 1$ y $\alpha > 1$). Cogiendo un representante de cada uno de los casos a estudiar, vemos que (x_n) converge a $x = 0$ en el caso $\alpha < 1$ independientemente del punto inicial x_0. (El caso $\alpha = 1$ corresponde a (x_n) constante).



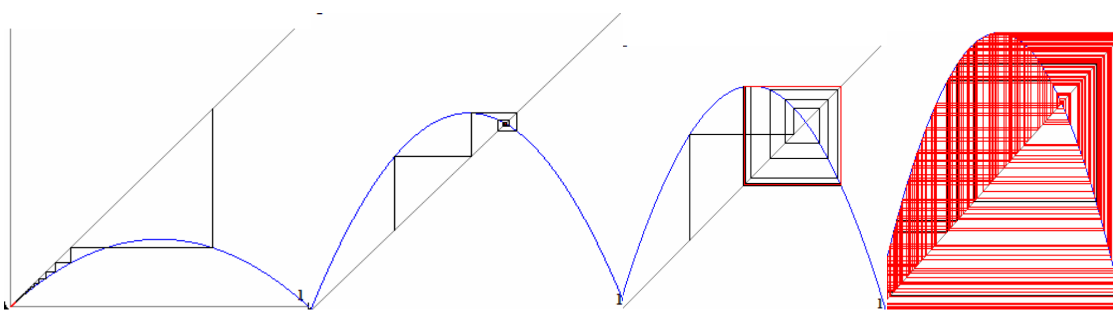
Si $0 < \alpha < 1$, la recta $y = \alpha x$ se encuentra por debajo de la recta $y = x$, entonces (x_n) tiende hacia el punto fijo $x = 0$.

Si $\alpha = 1$, situación en la que las dos funciones coinciden, entonces todo punto es un punto fijo.

Si $\alpha > 1$, situación en la que la recta $y = \alpha x$ se encuentra por encima y (x_n) tiende a $+\infty$.

Aplicación al modelo logístico (M_2)

La equación $x_{n+1} = \alpha\, x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ equivale a considerar la ecuación $x = \alpha\, x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ y la función $f(x) = \alpha x(1 - x/K)$, parábola con vértice en el punto: ($x_v = \frac{K}{2}$; $y_v = \frac{\alpha K}{4}$) e intersección con Ox en los puntos $x = 0$ y $x = K$. Por la naturaleza del sistema sabemos que $x_n \geq 0$ para todo n siendo K el límite de la población, así que sólo hará falta considerar la función definida en el intervalo $I = [0,K]$. Esta función depende de dos parámetros α y K, que al modificarlos producen diversas dinámicas[1].



- **Estudio de los puntos fijos**: Los puntos fijos son: $x_0 = 0 \;\; i \;\; x_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} K$. Éste último sólo tiene sentido cuando $x_1 > 0$, condición equivalente a $\alpha > 1$.

Distinguimos dos casos:

- Si $0 < \alpha < 1$, la parábola está por debajo de la recta $y = x$, sólo existe un punto fijo, $x_0 = 0$. La simulación gráfica indica que resulta ser un *atractor.*
- Si $\alpha > 1$, la parábola está por encima de la recta $y = x$ y aparecen dos puntos fijos. La simulación gráfica indica que el primero de ellos, $x_0 = 0$, es un *repulsor* porque (x_n) nunca converge hacia él.

> ***Q*$_{2.2}$:** ¿Qué condiciones aseguran que (x_n) esté bien definida en el caso del modelo logístico, es decir, que $0 < x_n \leq K$ para toda n? ¿Y que (x_n) converja?
>
> ¿De dónde surgen los valores límites $\alpha = 1$ y $\alpha = 3$?
>
> ¿Qué propiedades tiene el modelo $x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right)$ para estos valores de α?

- **Estudio de los intervalos invariantes:** Diremos que I es invariante por f si $f(I) \subseteq I$.

  Si $I = [0,K]$ es un intervalo invariante por f, entonces la sucesión (x_n) está bien definida. La función $f(x)$ alcanza un máximo en el vértice $(K/2, \alpha K/4)$. Para que $f([0,K]) \subseteq [0,K]$, debe cumplirse que: $\frac{\alpha K}{4} \leq K$ o, de forma equivalente, $\alpha \leq 4$. Consideraremos así a partir de ahora una nueva restricción sobre el sistema: $\alpha \in [0,4]$

- **Condiciones sobre $f'(x)$:** Dado que localmente tenemos que $f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$, el estudio local de la función $f(x)$ se puede aproximar por el estudio de su derivada. Si $f(x)$ es una función cuadrática entonces $f'(x)$ es una recta y el comportamiento de las sucesiones generadas por modelos con f lineales los tenemos muy bien estudiados en ***M*$_1$**.

  Consideramos $I = [0, K]$, tenemos $f'(x) = \alpha - 2\alpha/K = \alpha(1 - 2/K)$.

  Si evaluamos la derivada en el segundo punto fijo que hay en I, $f'(\frac{\alpha - 1}{\alpha} K) = 2 - \alpha$, así que, según el estudio hecho en el apartado 3.3.1, tendremos convergencia hacia en punto fijo cuando: $|2 - \alpha| < 1$, equivalente a $1 < \alpha < 3$.

R$_2$

- Si $1 < \alpha < 3$, tenemos dos puntos fijos $x_0 = 0$ y $x_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} K$, el primero es *repulsor* y el segundo es *atractor*, es decir, $(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_1$ (situación de equilibrio).
- Si $\alpha > 3$, el punto fijo x_1 se convierte en *repulsor,* (x_n) nunca convergerá hacia él, es decir, no llegaremos a ninguna situación de equilibrio.

Nos podemos plantear ahora el problema de descubrir cuántos elementos son necesarios para llegar a obtener un valor aproximado al punto fijo con una margen de error $10^{-\mu}$.

> ***Q*$_{2.3}$**: Fijado cierto margen de error $10^{-\mu}$, ¿a partir de qué n podemos asegurar que $|x_n - L| < 10^{-\mu}$?

Sea $M = sup\ (|f\ '\ (x)|)$ para $x \in I = [0;K]$, por el Teorema del valor medio tenemos que: $|x_n - L| \leq M^n \cdot |x_0 - L| < 10^{-\mu} \Rightarrow M^n \cdot K < 10^{-\mu}$. Usando logaritmos decimales, llegamos a una cota para n: $n > -\dfrac{\mu + \log(K)}{\log(M)}$.

Estamos así en condiciones de responder a las cuestiones $\boldsymbol{Q_{2.2}}$ y $\boldsymbol{Q_{2.3}}$:

R2.2

1) Calcular los puntos fijos de f, función cuadrática.
2) Encontrar I tal que $f\ (I) \subseteq I$ (intervalos invariantes)
3) Encontrar $I\ ' \subset I$ tal que $|f'(x)| < 1$ para todo $x \in I'$

R2.3

4) Calcular $k = \sup\limits_{x \in I}(|f'(x)|)$
5) Utilizar el *Teorema del valor medio* para determinar el número de pasos que son necesarios para obtener un valor aproximado del límite de (x_n) con un error máximo $10^{-\mu}$ dado.

Observación: Hemos encontrado una técnica para estudiar el comportamiento de la sucesión recurrente $x_{n+1} = f(x_n)$ independiente de la naturaleza de f. Sólo se requerirá que f sea de clase C^1 en I. El trabajo con $\boldsymbol{M_3}$, modelo que contiene tanto a $\boldsymbol{M_1}$ como a $\boldsymbol{M_2}$, provocará una *ampliación* enorme del *campo de problemas* con el que podremos trabajar: podemos pasar a considerar que f puede ser cualquier función de clase C^1 y trabajar con cualquier modelo matemático discreto definido a partir de ecuaciones recurrentes del tipo: $x_{n+1} = f(x_n)$.

$\boldsymbol{R_3}$: Generalización de la técnica principal $R_{2.2} + R_{2.3}$ con f cualquiera de clase C^1.

3.4. Propuesta de un posible proceso de estudio

Para reconstruir en la institución didáctica no sólo la OM final sino todo el proceso de elaboración de la misma, partiremos de una *cuestión generatriz* $\boldsymbol{Q_0}$ que se plantea a partir de una tabla de datos sobre el tamaño de algunas generaciones sucesivas de una población concreta. Estos datos iniciales permiten concretar las hipótesis y ayudan a las diferentes simulaciones propuestas en los apartados anteriores (medio numérico y gráfico).

Se propone empezar el estudio haciendo una hipótesis $\boldsymbol{H_1}$ que determina el sistema inicial $\boldsymbol{S_1}$. Es en este sistema donde se formula la siguiente cuestión $\boldsymbol{Q_1}$ (que puede formularse, de nuevo, con ayuda de una tabla de datos). Para responder a $\boldsymbol{Q_1}$ se construye el primer modelo matemático $\boldsymbol{M_1}$ (modelo lineal o maltusiano) cuyo desarrollo permite elaborar la respuesta $\boldsymbol{R_1}$. A largo plazo, los datos "reales" no coincidirán con la previsión.

Se puede entonces incluir la posibilidad de que los recursos sean limitados, apareciendo así las primeras *limitaciones del modelo maltusiano* y la necesidad de añadir la hipótesis $\boldsymbol{H_2}$ sobre el sistema. Esta nueva hipótesis modifica el sistema, lo convierte en un nuevo sistema $\boldsymbol{S_2}$ que genera una nueva cuestión $\boldsymbol{Q_2}$ que de nuevo puede plantearse con ayuda de una tabla de datos. Para responder a esta cuestión se construye un segundo modelo matemático, $\boldsymbol{M_2}$ (modelo logístico o de Verhulst). Este nuevo modelo contiene al anterior $\boldsymbol{M_1}$, puesto que éste es un caso particular al considerar $K = \infty$ (caso de recursos infinitos). El trabajo dentro de este modelo permite elaborar la respuesta $\boldsymbol{R_2}$ a $\boldsymbol{Q_2}$ mediante simulación numérica (medio 1).

Pronto aparecen nuevas cuestiones (***Q*$_{2.2}$** y ***Q*$_{2.3}$**) que no son fácilmente resolubles en ***M*$_2$** y que ponen de manifiesto las *limitaciones de* ***M*$_2$**. Para responder a ***Q*$_{2.2}$** y ***Q*$_{2.3}$** se requiere un *modelo funcional* ***M*$_3$**, esto es, un modelo analítico de los sistemas discretos y el recurso a la simulación gráfica (medio 2). Se obtienen así las respuestas ***R*$_{2.2}$** y ***R*$_{2.3}$**.

Dado que el nuevo modelo ***M*$_3$** permite responder a las cuestiones ***Q*$_{2.2}$** y ***Q*$_{2.3}$** sin necesidad de imponer la condición de que f sea una función lineal o cuadrática, podemos ampliar enormemente el universo de poblaciones, esto es, podemos considerar una clase de sistemas ***S*$_3$** mucho más amplia (definidos mediante una función de clase C^1) y plantear en estos sistemas la cuestión ***Q*$_3$** como generalización de las cuestiones anteriores. Obtenemos de esta manera la respuesta ***R*$_3$** que no es más que una generalización de la unión de las respuestas ***R*$_{22}$** y ***R*$_{23}$**. Esto equivale a decir que definimos una clase muy amplia de sistemas, ***S*$_3$**, que contiene a ***S*$_1$** y a ***S*$_2$**. Pero así como ***S*$_1$** y ***S*$_2$** podían caracterizarse a partir de las propiedades que cumple en cada caso la tasa de variación relativa de la población, ***S*$_3$** se caracteriza únicamente por el hecho que (x_n) cumple una relación de recurrencia de primer orden: $x_{n+1} = f(x_n)$.

Una vez situados en este ámbito tan amplio de sistemas, el proceso de estudio puede ampliarse para llegar a responder nuevas cuestiones tales como las que surgen de:

Q$_4$: Resolución aproximada de ecuaciones del tipo $x = f(x)$

Q$_4$*: Resolución aproximada de ecuaciones del tipo $f(x) = 0$

4. LA DINÁMICA DE POBLACIONES COMO EJE ARTICULADOR DE UN PRIMER CURSO DE MATEMÁTICAS EN LAS FACULTADES DE CIENCIAS

En este apartado esbozaremos nuestra propuesta para articular un primer curso de matemáticas para estudiantes de una Facultad de Ciencias de determinados desarrollos del proceso de estudio descrito anteriormente (ver esquema completo en el *Anexo*).

4.1. Génesis del Álgebra Lineal

Suponemos ahora que, en lugar de trabajar con una población con generaciones separadas, queremos estudiar la dinámica de una población ***X*** con *generaciones mezcladas*. Uno de los casos más sencillos que podemos encontrarnos es el de una población en la que cada generación depende, por ejemplo, de las dos anteriores. Suponemos que nuestro sistema puede ser modelizado mediante la ecuación recurrente:

$$\begin{cases} x_{n+2} = \alpha\, x_{n+1} + \beta\, x_n \\ x_1 = a \\ x_0 = b \end{cases} \qquad (1)$$

De la relación $x_{n+2} = \alpha\, x_{n+1} + \beta\, x_n$ tenemos también $x_{n+1} = \alpha\, x_n + \beta\, x_{n-1}$.

Si substituimos la última ecuación en (1):

$$x_{n+2} = \alpha\left(\alpha\, x_n + \beta\, x_{n-1}\right) + \beta\, x_n = \alpha^2 x_n + \alpha\beta\, x_{n-1} + \beta\, x_n = \left(\alpha^2 + \beta\right)x_n + \alpha\beta\, x_{n-1}$$

De manera que: $$\begin{cases} x_{n+2} = \alpha\, x_{n+1} + \beta\, x_n \\ x_1 = a \\ x_0 = b \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_{n+2} = \left(\alpha^2 + \beta\right)x_n + \alpha\beta\, x_{n-1} \\ x_{n+1} = \alpha\, x_n + \beta\, x_{n-1} \\ x_1 = a,\ x_0 = b \end{cases} \qquad (2)$$

Con la ventaja de que (2) permite trabajar con matrices:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^2+\beta) & \alpha\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

Aplicando *n* veces la relación llegamos a:

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha^2+\beta) & \alpha\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Nos encontramos así inmersos en el área del *Álgebra Lineal*, tratando el problema de encontrar la potencia n-ésima de una matriz, que nos llevará hasta el estudio de diagonalizar matrices, formas de Jordan, y toda el Álgebra Lineal elemental.

En síntesis hemos esquematizado la construcción de una OM que denominaremos **$\mathbf{OM_{D2}}$**, haciendo referencia al estudio de dinámicas donde el tiempo se mide en unidades *discretas* y cuya relación de recurrencia es de *orden* 2. Tal como se indica en el esquema (ver Anexo) tenemos que $\mathbf{OM_{D1}} \subset \mathbf{OM_{D2}}$. Obviamente este desarrollo puede ampliarse para n > 2.

4.2. Relación con el cálculo diferencial e integral

Suponemos ahora que, en lugar de $\Delta t = n \in N$, Δt puede tomar valores arbitrariamente pequeños. Si suponemos que *x* es derivable respecto de *t*, podemos describir relaciones, cuando $\Delta t \to 0$, del tipo: $x' = F(t, x)$

Este tipo de ecuaciones diferenciales incluye todos los modelos continuos de dinámicas de poblaciones, aunque aquí únicamente trataremos el caso de la *ecuación diferencial con variables separadas* puesto que incluye, como casos particulares, a los modelos (continuos) maltusiano $x' = \alpha \cdot x$ y logístico $x' = \alpha \cdot x(1 - x/K)$, ecuaciones que son casos particulares de $x' = f(x)$ con *f* función cualquiera.

Las ecuaciones descritas se pueden escribir de la forma: $x' = \dfrac{a(t)}{b(x)}$. Son *ecuaciones diferenciales con variables separadas* y se resuelven por integración de los dos miembros de la ecuación equivalente $b(x) \cdot x' = a(t)$.

En síntesis hemos esquematizado la construcción de una organización matemática que denominaremos $\mathbf{OM_{C1}}$, haciendo referencia al estudio de dinámicas donde el tiempo se considera una variable *continua* y cuyo modelo es una ecuación diferencial ordinaria de *orden* 1. Tal como se indica en el esquema (ver *Anexo*) también seria posible otra ampliación hacia el conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias.

4.3. Relación con el cálculo numérico

Hemos visto que el último de los sistemas considerados conducía a la consideración de sistemas más amplios como los métodos recurrentes de resolución de ecuaciones del tipo *f*(*x*).

***Q_4*:** Resolución de ecuaciones del tipo $x = f(x)$
***Q_4**:** Búsqueda de raíces de $F(x) = 0$

R_4
R_{4^*}

- Separar las soluciones de la ecuación $F(x) = 0$a través del estudio y la representación gráfica de la función $F(x)$. Posteriormente se podrá extender al estudio a ecuaciones de la forma $g(x) = h(x)$. Aproximar cada solución utilizando el "método de dicotomía" con una precisión de, por ejemplo, 10^{-1}.
- Mejorar la primera aproximación de les soluciones de *F(x)=0* encontradas, utilizando un método iterativo definiendo la sucesión recurrente: $x_{n+1} = f(x_n)$ donde $x = f(x)$ es una ecuación equivalente (no única) de $F(x) = 0$ en un entorno de cada raíz.
- Aplicar la *técnica principal generalizada* descrita en $\boldsymbol{R_3}$.
- Determinar nuevas ecuaciones equivalentes $x = f(x)$ con mayor velocidad de convergencia (estudio comparativo de métodos de aproximación de raíces).

4.4. A modo de conclusión: un primer paso hacia la implantación de los REI

Después de describir las modelizaciones progresivas del sistema inicial *X* (población) y esquematizar una posible extensión de éstas para recubrir y articular todo el programa de matemáticas del primer curso universitario de matemáticas, quedan muchas cuestiones abiertas:

¿Qué tipo de Organización Didáctica (OD) se requiere para llevar a cabo un proceso de estudio de esta naturaleza? ¿Qué dispositivos didácticos sería necesario crear (o, en su caso, modificar) y qué nuevo contrato didáctico debería establecerse para que la modelización matemática pueda no sólo vivir con normalidad en las instituciones didácticas sino ocupar una posición central en el proceso de estudio y convertirse así en una técnica poderosa para abordar el problema didáctico que hemos planteado?

A falta de llevar a cabo una experimentación efectiva del proceso de estudio diseñado, hemos postulado que para que un tal proceso tenga cabida, la OD escolar debe ser capaz de reconstruir, institucionalizar y evaluar más allá de los componentes de las OM cristalizadas, los instrumentos que permiten llevar a cabo el proceso de matematización, así como la razón de ser de dicha matematización, esto es, la cuestión generatriz del proceso de estudio y el conjunto de cuestiones que van surgiendo durante su estudio.

Este tipo de OD deberá ser interpretada como un caso particular de los *recorridos de estudio e investigación* (REI) recientemente introducidos en la TAD y considerados como "modelo potencial" de los procesos didácticos posibles o existentes (Chevallard 2004 y 2005). En efecto, al asumir que el proceso de estudio debe acabar "cubriendo" un conjunto de "temas" previamente establecidos, limitamos el carácter abierto del proceso que es una de las características esenciales de los REI. Al mismo tiempo, y a falta de confirmación experimental, nuestro trabajo sugiere que el control progresivo de este tipo de restricciones nos proporcionará instrumentos para empezar a reformar las OD clásicas en la dirección propuesta por los REI.

Una de las restricciones más importantes proviene de la tradicional descripción del currículum de matemáticas (o programa de estudio de un curso) mediante un listado de "temas" y un conjunto (más o menos explícito) de tipos de problemas. Para avanzar hacia la implantación de los REI será necesario no sólo integrar en el currículo las "razones de ser" de las OM escolares, esto es, las cuestiones generatrices a las dichas OM responden, sino que dichas cuestiones tienen que pasar a ocupar un papel central en la nueva descripción del currículum, dejando relativamente abierto el recorrido que llevará, en cada caso, de las cuestiones a las respuestas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2001): La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. El caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 20(1), 7-40.

Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004): Why is modelling not included in the teaching of álgebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didacttica*, 14, 125-133.

Bulaevsky, J. (1997): Interesting Facts about Population growth Mathematical Models. http://www.arcytech.org/java/population/facts_math.html

Chevallard, Y. (1998) : "Sur l'inadéquation de la formation première des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire français", IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2004): La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire, *3e Université d'été Animath*, Saint-Flour (Cantal), 22-27 août 2004.

Chevallard, Y. (2005): Steps towards a new epistemology in mathematics education. *IV Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4).* Sant Feliu de Guíxols (Spain).

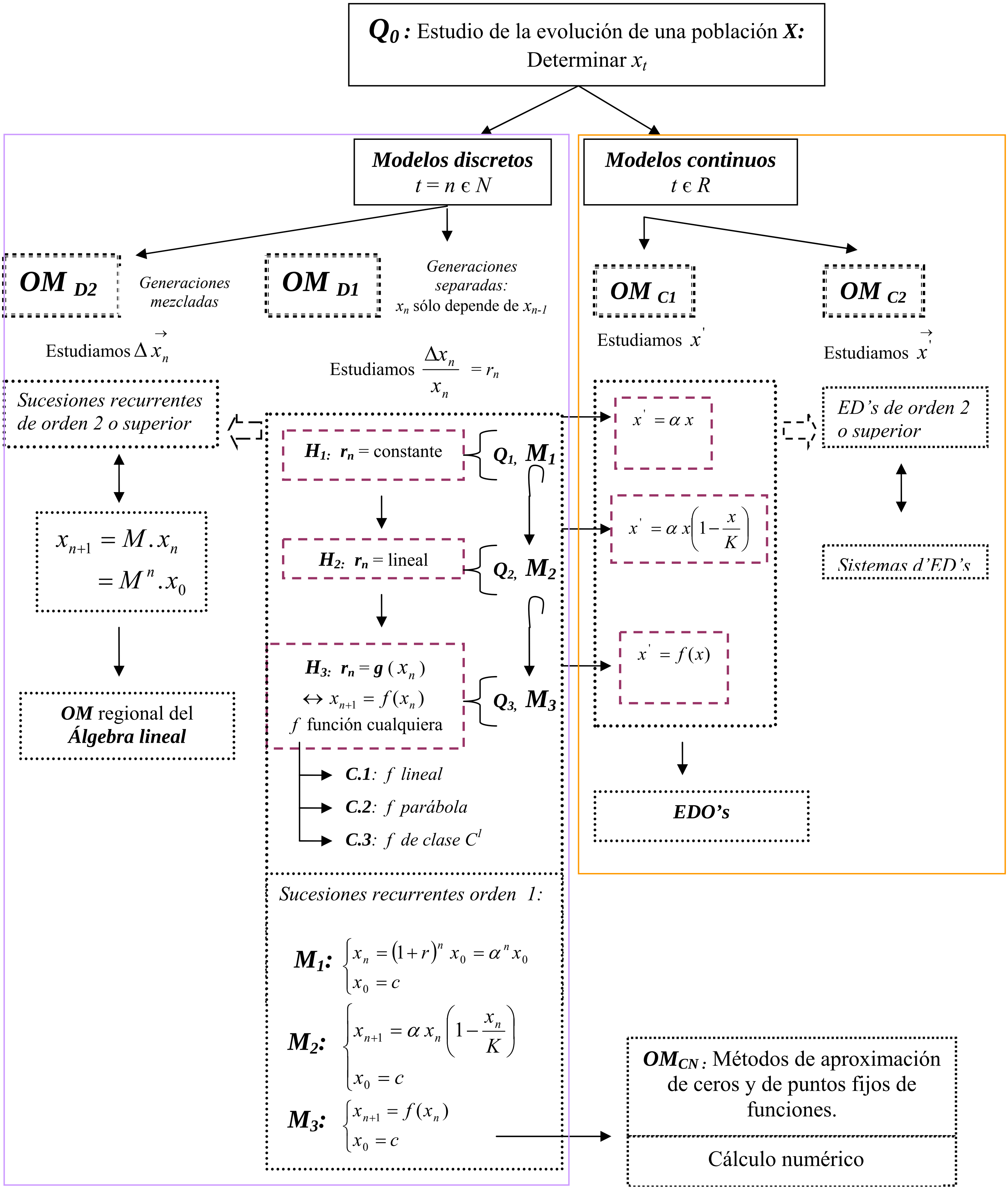
Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE/Horsori.

García, F.J.(2005): *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales.* Universidad de Jaén, Dto. Didáctica de las Matemáticas. Tesis doctoral.

May, R.(1976): Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature,* 261, 459.

Miramontes, P. (2004): La biología matemática. *Las matemáticas y su entorno. Aprender a aprender.* 47-65.

Anexo



Q_0 : Estudio de la evolución de una población ***X:*** Determinar x_t
Modelos discretos $t = n \in N$
Modelos continuos $t \in R$
OM $_{D2}$
Generaciones mezcladas
OM $_{D1}$
Generaciones separadas: x_n sólo depende de x_{n-1}
Estudiamos $\Delta \vec{x}_n$
Estudiamos $\frac{\Delta x_n}{x_n} = r_n$
Sucesiones recurrentes de orden 2 o superior
$x_{n+1} = M.x_n = M^n.x_0$
OM regional del ***Álgebra lineal***
H_1: r_n = constante
Q_1, M_1
H_2: r_n = lineal
Q_2, M_2
H_3: $r_n = g(x_n) \leftrightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
f función cualquiera
Q_3, M_3
C.1: *f lineal*
C.2: *f parábola*
C.3: *f de clase* C^1
Sucesiones recurrentes orden 1:
M_1: $\begin{cases} x_n = (1+r)^n x_0 = \alpha^n x_0 \\ x_0 = c \end{cases}$
M_2: $\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \\ x_0 = c \end{cases}$
M_3: $\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_0 = c \end{cases}$
OM $_{C1}$
Estudiamos x'
OM $_{C2}$
Estudiamos $\vec{x}'$
$x' = \alpha x$
$x' = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right)$
$x' = f(x)$
ED's de orden 2 o superior
Sistemas d'ED's
EDO's
OM_{CN}: Métodos de aproximación de ceros y de puntos fijos de funciones.
Cálculo numérico